Solucionario Álgebra 3.°

Unidad 1

TEORÍA DE EXPONENTES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. Dato: $n^n = 4$

Nos piden:

$$n^{n^{n+1^{n+2^{n+3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n+8}}}}}}}} = 1$$

$$n^{n^{n+1}} = n^{n^n . n} = (n^n)^{n^n} = 4^4 = 256$$

Clave E

4. $A = 3^2 + (3^2)^3 - 27^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$A = 9 + 3^6 - (3^3)^2 - 5$

$A = 9 - 5 = 4$

Clave D

5. $M = 4^1 + 3^2 - 3^3 = 4 + 9 - 27$

$\therefore M = -14$

Clave D

6. $N = \dfrac{(3^8)^3}{(3^4)^5}$

$N = \dfrac{3^{24}}{3^{20}} = 3^{24-20} = 3^4 = 81$

Clave C

Resolución de problemas

7. $A = \dfrac{3^x(3^3 - 3)}{3^x(3^2 - 1)} = 3$

Clave D

8. $\left(\dfrac{m}{n}\right)^{2(m+n)} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m+n}{2}} \Rightarrow m + n = 0$

Clave C

Nivel 2 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

9.

Razonamiento y demostración

10. Dato: $x^x = 2$

Nos piden: $E = x^{4x + x^{x+1}}$

Buscamos x^x:

$E = x^{4x}.x^{x^{x+1}} = (x^x)^4.x^{x^x.x}$

$E = (x^x)^4.(x^x)^{x^x}$

Reemplazamos la condición:

$E = 2^4 . 2^2 = 2^6 = 64$

Clave C

11. $A = 7^{2^{-3}}$; $B = 2^4$; $C = \frac{1}{7}$

Nos piden:

$A^B.C = (7^{2^{-3}})^{2^4}.\frac{1}{7}$

$A^B.C = 7^{2^{-3}.2^4}.\frac{1}{7} = \frac{7^2}{7} = 7$

Clave D

12. $(3^2 + 2^4)^{\frac{1}{2}} = (9 + 16)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow S = \sqrt{25}$ $\qquad \therefore S = 5$

Clave B

13. $M = [2^2 + 2.3^2 + 3^3]^{\frac{1}{2}} = 49^{\frac{1}{2}}$

$M = \sqrt{49}$ $\qquad \therefore M = 7$

Clave C

14. $x^{-2} . x^{-4} . x^{-6} . x^{-8} . x^{-10} . x^{-12}$

$= x^{-2-4-6-8-10-12} = x^{-42}$

Clave C

15. $M = \dfrac{5(2.3)^5}{2^5(2^3 - 2^1 - 1)}$

$M = \dfrac{5.2^5.3^5}{2^5.5} = 3^5 \Rightarrow M = 3^5 = 243$

Clave A

16. $(\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt[4]{4})\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= (2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2})\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= 6\sqrt{2} . \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6$

Clave D

Resolución de problemas

17. $x^{\frac{b(a+1)}{a^2}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dfrac{b(a+1)}{a^2} = \dfrac{1}{2}$

Luego:

$x^{2\left(\frac{b(a+1)}{a^2}\right)} = x^{2\left(\frac{1}{2}\right)} = x^1$

Clave E

18. $x^{\frac{ab+b}{a^3}} = x^{20} \Rightarrow \dfrac{(a+1)b}{a^3} = 20$

Luego:

$x^{5\left(\frac{(a+1)b}{a^3}\right)} = x^{5(20)} = x^{100}$

Clave C

Nivel 3 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

19.

20.

Razonamiento y demostración

21. $Y = \dfrac{2^{x+4} + 2^{x+3} - 2^{x+1}}{2^{x+3} - 2^{x+2}}$

$Y = \dfrac{2^{x+1}(2^3 + 2^2 - 1)}{2^{x+2}(2 - 1)}$

$Y = \dfrac{2^{x+1-x-2}(11)}{1}$

$Y = 2^{-1}(11) = \dfrac{11}{2}$

Clave A

22. $R = \dfrac{5.2^{x+2} - 2^{x+4} + 3.2^x}{2^{x+4} - 15.2^x}$

$R = \dfrac{2^x(5.2^2 - 2^4 + 3)}{2^x(2^4 - 15)} = \dfrac{7}{1}$

$\therefore R = 7$

Clave E

23. Dato: $x^x = 2$

Nos piden:

$x^{2x^{1+2x}} = x^{2x.x^{2x}}$

Buscamos formar el dato:

$(x^x)^{2(x^x)^2} = 2^{2.2^2} = 2^8 = 256$

Clave D

24. Si:

$2^{-x} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 2^{-x} = 3^{-1}$

$2^x = 3$

Nos piden:

$(4^x)^2 + (8^x)^{\frac{1}{3}} + (16^x)^{\frac{1}{2}}$

Buscamos el dato:

$(2^2)^{2x} + (2^3)^{\frac{x}{3}} + (2^{4x})^{\frac{1}{2}}$

$2^{4x} + 2^x + 2^{2x} = (2^x)^4 + 2^x + (2^x)^2$

Reemplazamos:

$3^4 + 3 + 3^2 = 93$

Clave C

25. $\underbrace{(x^{99} + x^{99} + ... + x^{99})}_{99 \text{ veces}} \div \underbrace{(x . x ... x)}_{99 \text{ veces}}$

Reducimos:

$= 99x^{99} \div x^{99} = 99$

Clave B

26. $k = \dfrac{20^2.32.(21^3)^2}{45.12^3.98^2.49}$

$k = \dfrac{(2^2.5)^2.2^5.(3^3.7^3)^2}{3^2.5(2^2.3)^3.(2.7^2)^2.7^2}$

$k = \dfrac{2^4.5^2.2^5.3^6.7^6}{3^2.5.2^6.3^3.2^2.7^4.7^2}$

$$k = \frac{2^9 . 3^6 . 5^2 . 7^6}{2^8 . 3^5 . 5 . 7^6}$$

$$k = 2 . 3 . 5 = 30$$

$$\therefore k = 30$$

Clave C

27. $a_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...}}}}_{n-1 \text{ radicales}}$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad a_n^2 = 2a_{n-1}$$

Calculamos:

$$a_{100}^2 = 2a_{99} \Rightarrow \frac{a_{99}}{a_{100}^2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{200}^2 = 2a_{199} \Rightarrow \frac{a_{200}^2}{a_{199}} = 2$$

Reemplazamos en R:

$$R = \frac{a_{99} . a_{200}^2}{a_{100}^2 . a_{199}} = \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 1$$

Clave C

Resolución de problemas

28. $\frac{\sqrt[4]{y^8}}{y^2}\left(\frac{\sqrt[a]{x^6}}{\sqrt[2a]{x}\sqrt[a]{x^3}}\right)^b = \frac{y^2}{y^2}\left(x^{\frac{6}{a} - \frac{3}{a} - \frac{1}{2a}}\right)^b = x^{\frac{5b}{2a}}$

$$x^{\frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)} = x^1$$

Clave A

29. $x^{\frac{bc + c - b}{abc}} = x^{37} \Rightarrow \frac{bc + c - b}{abc} = 37$

Luego:

$$x^{\left(\frac{cb + c - b}{abc}\right)7} = x^{(37)7} = x^{259}$$

Clave B

30. $P = \sqrt{x^{x^{x+1}} + x^{x^{1+x^{1+x}}} + x^{2x}}$

$$P = \sqrt{(x^x)^{x^x} + x^{x.x^{x^{1+x}}} + x^{2x}}$$

$$P = \sqrt{(x^x)^{x^x} + (x^x)^{(x^x)^{(x^x)}} + (x^x)^2}$$

Como $x^x = 2$:

$$P = \sqrt{2^2 + 2^{2^2} + 4} = \sqrt{24}$$

$$\therefore P = 2\sqrt{6}$$

$$Q = \sqrt{(x^x)^3 + \left(x^{x^{1+x}}\right)^{x^x + 1}}$$

$$Q = \sqrt{(x^x)^3 + (x^x)^{(x^x)(x^x + 1)}}$$

Como $x^x = 2$:

$$Q = \sqrt{2^3 + 2^{2.3}} = \sqrt{72}$$

$$\therefore Q = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P \div Q = \frac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Clave D

POLINOMIOS

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 12) Unidad 1

Comunicación matemática

1. I. $P(2; 3; 4) = 2 + 3 - 4 = 1$
Incorrecto

II. $P(-1; 5; -2) = 2(-1) + 3(5) + 4(-2) = 5$
Correcto

III. $P(6; -2; 3) = \frac{6}{2} + 5(-2) - 3 = -10$
Incorrecto

IV. $P(-5; 4; -6) = -(-5) - 3(4) + \frac{(-6)}{3} = -9$
Correcto

V. $P(1; -3; 7) = 2(1 - 3 + 7) = 10$
Correcto

2.
- El polinomio homogéneo que figura tres veces es:
$P(x; y) = x^2y + 2xy^2 + 5x^3 + y^3$
- El polinomio completo y ordenado respecto a x en forma descendente y que se repite 1 vez es:
$P(x; y) = 3x^3 + 7x^2y + 7x + 11y^3$

Razonamiento y demostración

3. $P(x) = x^2 - x + 1$
$P(3) = 3^2 - 3 + 1 = 7$
Piden: $F(P(3)) = F(7) = 7^2 + 1 = 50$

Clave A

4. $P(x) = ax^2 + bx + c$
$P(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c = c + 2$
$a - b = 2$
Piden: $a - b = 2$

Clave D

5.
$$\frac{P(2)P(4)P(6)}{P(10)} = \frac{5^2.5^4.5^6}{5^{10}} = \frac{5^{2+4+6}}{5^{10}} = \frac{5^{12}}{5^{10}} = 5^2$$
$$\therefore \frac{P(2)P(4)P(6)}{P(10)} = 25$$

Clave D

6. Hallamos:
$P(x + 1) = (x + 1) + 1$
$P(x + 1) = x + 2$
$P(x - 1) = (x - 1) + 1$
$P(x - 1) = x$
Reemplazando:
$E = x + 2 - x \Rightarrow E = 2$

Clave C

7. Como:
$GA(P) = 17$
$2a + 7 = 17 \Rightarrow 2a = 10$ $\quad\therefore a = 5$

Clave E

8. Como:
$GR(y) = 23$
$4m + 3 = 23 \Rightarrow 4m = 20$ $\quad\therefore m = 5$

Clave A

Resolución de problemas

9. $Q(x) = x + 3$ ...(I)
$Q(a) = b$
En (I): $x = a \Rightarrow Q(a) = a + 3 = b$
Nos piden: $b - a = 3$

Clave E

10. $f(x) = x + a$
Piden:
$\frac{f(x + a) - x}{a}$ ...(I)
$f(x + a) = x + a + a = x + 2a$
Reemplazando en (I):
$\frac{x + 2a - x}{a} = 2$

Clave B

Nivel 2 (página 12) Unidad 1

Comunicación matemática

11. I. $P(2; 3; 4) = (2 + 3 + 4)^2 = 81$ (V)

II. $P(-5; 6; -2) = 2(-5) - \frac{6}{3} + (-2)^2 = -8$ (V)

III. $P(6; 0; -4) = 2(6 - 0) + \frac{0 - 4}{2} = 10$ (V)

IV. $P(-1; -2; -3) = -2[-1 - (-3)] + 3(-2-(-1))$
$= -7$ (F)

V. $P(1; -8; 2) = 1^2 - (-8 + 2)^2 = -35$ (F)

12. a) $P(x) = a^{a^a}x^9 + x^n;\ n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n < 9$

b) Sea "a" al coeficiente
$\Rightarrow P(x) = ax^3 + ax^2 + ax + a,\ a \in \mathbb{R}$

c) Uno de los polinomios podría ser
$P(x) = x^2 + x^4 + 1 + x + x^3$
o
$P(x) = x^3 + 1 + x + x^2 + x^4$
} variar el orden de los términos

Razonamiento y demostración

13. $P(x) = x^2 + x + 1$
$M = P(-1) + P(0) + P(1)$ ... (1)
Sea:
$x = -1 \Rightarrow P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$
$x = 0 \Rightarrow P(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
$x = 1 \Rightarrow P(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$
Reemplazando en (1):
$M = 1 + 1 + 3 = 5$

Clave A

14. $P(x) = x^2 + 2x + 2$ ...(I)
$x = -2 \Rightarrow P(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 2$
$P(-2) = 2$
Nos piden:
$P(\underbrace{P(-2)}_{2}) = P(2) = ?$

En (I): $x = 2$
$P(2) = 2^2 + 2(2) + 2 = 10$

Clave E

15. Ordenando:
$P(x) = (a - 2)x^5 + (2a - b - 3)x + (2c - 3b)$
$Q(x) = -4x^5 - 5x + 6$
Si: $P(x) = Q(x)$
Se cumple:
$a - 2 = -4 \Rightarrow a = -2$
$2a - b - 3 = -5 \Rightarrow b = -2$
$2c - 3b = 6 \Rightarrow c = 0$
Nos piden:
$a + b + c = -4$

Clave E

16. $P(x) = P(x - 1) + P(x - 2)$ ... (I)
$P(1) = 3;\ P(2) = 4$
Sea $x = 2$ en (I):
$P(2) = P(1) + P(0)$
$4 = 3 + P(0)$
$P(0) = 1$
Nos piden:
$P(P(0)) = P(1) = 3$

Clave B

17. Si: $P(y) = 2y^{2m+1} - 3y^{m+7} + y^{2m+7} + 8$
$\Rightarrow \underbrace{GR(y)}_{9} = 2m + 7$
$9 = 2m + 7 \Rightarrow m = 1$

Clave A

18. $P(x) = \sqrt{7}x^{1+m} - \sqrt{6}x^{m+2} + \sqrt{5}x^{2m+3}$
Dato: P(x) es de 5.° grado
Entonces: $2m + 3 = 5 \Rightarrow m = 1$

Clave A

19. Como:
$GR(x) = 13$
$a + 1 = 13 \Rightarrow a = 12$
Luego:
$GR(y) = 2a + 3 = 27$
$\therefore a - GR(y) = -15$

Clave A

20. $Q(m + 1) = m^2 + 2m + 5 = (m + 1)^2 + 4$
Haciendo: $m = x - 1$
$Q(x - 1 + 1) = (x - 1 + 1)^2 + 4$
$Q(x) = x^2 + 4$
$Q(x) - x^2 - 4 = 0$
Restamos $2x^2$ a ambos miembros:
$Q(x) - x^2 - 4 - 2x^2 = -2x^2$
$Q(x) - 3x^2 - 4 = -2x^2$
Nos piden $Q(x) - 3x^2 - 4$; entonces:
$Q(x) - 3x^2 - 4 = -2x^2$

Clave D

21. $P(x; y) = x^2y^n - \frac{1}{4}x^{n+2}y^{n-1} + 10$
Como:
$GR(x) = 7$
$n + 2 = 7 \Rightarrow n = 5$ $\quad\therefore n^2 - 1 = 24$

Clave C

22. $P(P(x)) = bx + 12$ ...(I)

$P(x) = 3x + a$

Sea $x = P(x)$:

$P(P(x)) = 3\underbrace{P(x)}_{3x+a} + a$

$P(P(x)) = 9x + 4a$ ...(II)

Luego: I = II

$bx + 12 = 9x + 4a$

$\Rightarrow b = 9$

$4a = 12 \Rightarrow a = 3$

Nos piden:

$a + b = 9 + 3 = 12$

Clave C

Resolución de problemas

23. Por ser homogéneo se cumple:

$\underbrace{n^5 + 4n + 3}_{(I)} = \underbrace{2n + n^5 + 7}_{(II)} = \underbrace{2(2a + 5b)}_{(III)}$

(I) y (II):

$n^5 + 4n + 3 = 2n + n^5 + 7 \Rightarrow n = 2$

(II) y (III):

$2n + n^5 + 7 = 2(2a + 5b) \Rightarrow 2a + 5b = \frac{43}{2}$

Producto de coeficientes: PC

$PC = 3n\left(-(2a + 5b) + \frac{n^3}{16}\right)(2(2a + 5b) + 3n^2)$

$= 3(2)\left(-\left(\frac{43}{2} - \frac{2^3}{16}\right)\right)\left(2\left(\frac{43}{2}\right) + 3(2)^2\right)$

$= 6(-21) \,.\, 55 = -6930$

Clave D

24. M(z) es de séptimo grado, entonces:

$\frac{p+q}{2p} = 7 \Rightarrow 1 + \frac{q}{p} = 14$ ...(i)

$\frac{q+r}{2q} = 7 \Rightarrow 1 + \frac{r}{q} = 14$ ...(ii)

$\frac{p+r}{2r} = 7 \Rightarrow 1 + \frac{p}{r} = 14$ ...(iii)

El grado del monomio (GN) estará dado por:

$GN = \frac{q}{p} + \frac{r}{q} + \frac{p}{r}$

$\Rightarrow$ (i) + (ii) + (iii):

$3 + GN = 3(14) \Rightarrow GN = 39$

Clave C

25. Si $P(\underbrace{x^3 + 1}) = x + 3$ ...(1)

Sea $y = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1}$

Luego, en (1):

$P(y) = \sqrt[3]{y - 1} + 3$

$\therefore P(x) = \sqrt[3]{x - 1} + 3$

Clave A

26. $M(x) = \frac{\sqrt[n^{-n}]{x^{n^n}}}{\sqrt[4]{x^{16n^n}}} = \frac{x^{\frac{n^n}{n^{-n}}}}{x^{\frac{16n^n}{4}}} = x^{n^{2n} - 4n^n}$

Dato: M(x) es de grado 621, entonces:

$n^{2n} - 4n^n = 621 \Rightarrow n^n(n^n - 4) = 3^3(3^3 - 4)$

$\therefore n = 3$

Clave B

Nivel 3 (página 13) Unidad 1

Comunicación matemática

27. I. $P\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{5}; -\frac{1}{4}\right) = 3\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{61}{20}$

(V)

II. $P(6; -3; -2) = 6^2 - \frac{1}{4}(-3) + 2(-2) = \frac{131}{4}$

(F)

III. $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2}{2} - 4\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{301}{96}$

(V)

28. A) B(x) = ?

A(x) + B(x): grado 3

$B(x) = -x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

a, b, c y d ∈ ℝ

$A(x) + B(x) = (a + 4)x^3 + (b - 7)x^2 + (c + 2)x + (d - 3)$: 3.er grado

B) C(x) = ?

A(x) + C(x): grado 2

$C(x) = -x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c$

a, b y c ∈ ℝ

$A(x) + C(x) = (a - 7)x^2 + (b + 2)x + (c - 7)$: 2.° grado

C) D(x) = ?

A(x) + D(x) grado 1

$D(x) = -x^4 - 4x^3 + 7x^2 + ax + b$

a, b ∈ ℝ

$A(x) + D(x) = (a + 2)x + (b - 7)$ 1.er grado

D) E(x) = ?

A(x) + E(x): grado 0

$E(x) = -x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x + a$

a ∈ ℝ

$A(x) + E(x) = a - 7$: 0.° grado

Razonamiento y demostración

29. $E = \sqrt{(5x - 1)^3 + \sqrt{(5x - 1)^2 - 1}}$

Si $x = \frac{2}{5}$, entonces:

$E = \sqrt{\left(5 \,.\, \frac{2}{5} - 1\right)^3 + \sqrt{\left(5 \,.\, \frac{2}{5} - 1\right)^2 - 1}}$

$E = \sqrt{(2 - 1)^3 + \sqrt{(2 - 1)^2 - 1}}$

$E = \sqrt{1 + \sqrt{0}}$

$E = 1$

Clave A

30. $P\left(\frac{2x}{3} - 2\right) = 4x + 4$

Hallando P(0): $\frac{2x}{3} - 2 = 0 \Rightarrow x = 3$

Entonces: $P(0) = 4(3) + 4 = 16$

Piden: $\sqrt{P(0)} = \sqrt{16} = 4$

Clave B

31. $F(x) + 2F\left(\frac{2010}{x}\right) = 3x$

Sea: x = 1

Entonces:

$F(1) + 2F(2010) = 3$ ...(I)

Sea: x = 2010

Entonces:

$F(2010) + 2F(1) = 3 \times 2010$ ...(II)

2(II) – (I):

$3F(1) = 6 \times 2010 - 3$

$F(1) = 2 \times 2010 - 1$

$F(1) = 4019$

Clave D

32. $P(x) = a(x + 1) + b(x - 1)$

Agrupando:

$P(x) = (a + b)x + a - b$

Como es mónico, entonces:

$\Rightarrow a + b = 1$ ...(I)

Además:

$TI(P) = 3 \Rightarrow P(0) = 3$

$x = 0 \Rightarrow P(0) = a - b = 3$ ...(II)

(I) + (II): $2a = 4$

$a = 2$

En (I):

$2 + b = 1 \Rightarrow b = -1$

Nos piden:

$\Sigma coef.\ P(x) = P(1) = 2a = 2(2) = 4$

Clave C

33. $f(x) = 3x + 1$

$f(x - 1) = 3(x - 1) + 1 = 3x - 3 + 1$
$= 3x - 2$

$f(x + 3) = 3(x + 3) + 1 = 3x + 9 + 1$
$= 3x + 10$

$f(a) = 3a + 1$

$f(x - 1) + f(x + 3) + f(a) = 2f(x)$

$3x - 2 + 3x + 10 + 3a + 1 = 2(3x + 1)$

$6x + 9 + 3a = 6x + 2$

$3a = -7$

Piden: $3a - 1 = (-7) - 1$
$= -8$

Clave A

34. $F(x) = 3^{x-1}$

$\dfrac{F(x+y)}{3} = ?$

Evaluamos x + y en F(x):

$\dfrac{F(x+y)}{3} = 3^{x+y-2}$

$= 3^{x-1}\,.\,3^{y}\,.\,3^{-1}$

$= 3^{x-1}\,.\,3^{y-1}$

$\dfrac{F(x+y)}{3} = F(x).F(y)$

Clave A

35. $P(x) = Q(x)$

$2x^2 + 3x + 7 = (a+b-3)x^2 + (b+c-3)x + (a+b)$

$\Rightarrow a + b - 3 = 2 \Rightarrow a + b = 5$ ...(1)

$b + c - 3 = 3 \Rightarrow b + c = 6$ ...(2)

$a + c = 7$ ...(3)

De (3) y (1):

$c - b = 2$ ...(4)

(4) + (2)

$2c = 8 \Rightarrow c = 4$

$b = 2$

En (1):

$a + b = 5 \Rightarrow a = 3$

$a + b + c = 3 + 2 + 4 = 9$

Clave E

36. $P(x) = (a-1)x^{2a+1} + (b+2)x^{2a-3} - cx^{2a+2}$

Como:

$GA(P) = 16$

$\Rightarrow\ 2a + 2 = 16 \quad \Rightarrow\ 2a = 14$

$\Rightarrow\ a = 7 \qquad \therefore\ \sqrt{a+2} = 3$

Clave A

37. Dados los polinomios:

$P(x; y) = x^{m+1} - 2x^{m+2}y^{n+3} + 3y^{n+7}$

$Q(x; y) = 2x^{m} + 3x^{m-7}y^{n+7} - 8y^{n+9}$

Además:

$GR(x)[P] + GR(y)[Q] = 22;\ GR(x)[P] = 12$

Como:

$\underbrace{GR(x)[P]}_{} = 12 \Rightarrow GR(y)[Q] = 10$

$m + 2 = 12 \ \Rightarrow\ m = 10$

Como:

$GR(y)[Q] = 10$

$n + 9 = 10 \Rightarrow n = 1$

$\therefore GA(Q) = m - 7 + n + 7 = m + n = 11$

Clave E

38. $GR(y) = 5$

$\Rightarrow \dfrac{b+3}{4} = 5 \ \Rightarrow\ b = 17$

$\Rightarrow GA(M) = 13$

$\dfrac{a-2}{4} + \underbrace{\dfrac{b+3}{4}}_{5} = 13$

$\dfrac{a-2}{4} = 8 \Rightarrow a = 34$

$\therefore\ a - b = 17$

Clave B

39. $P(x) = (a + b - 6abc)x^2 + (a + c - 3abc)x + (b + c - 7abc)$

Se anula para x = 1

$\Rightarrow P(1) = 0$

$P(1) = (a + b - 6abc)(1)^2 + (a + c - 3abc)1 + (b + c - 7abc) = 0$

$a + b + a + c + b + c = 6abc + 3abc + 7abc$

$2(a + b + c) = 16\ abc$

$\dfrac{abc}{a+b+c} = \dfrac{1}{8}$

$\left(\dfrac{abc}{a+b+c}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = 2$

Clave C

Resolución de problemas

40. Del polinomio Q(x; y; z):

$\dfrac{m}{p} + \dfrac{q}{n} = 1$ ...(i)

$\dfrac{n}{q} + \dfrac{k}{r} = 1$ ...(ii)

$\dfrac{r}{k} + \dfrac{s}{t} = 1$ ...(iii)

De (i):

$\dfrac{m}{p} + \dfrac{q}{n} = 1 \Rightarrow \dfrac{q}{n} = 1 - \dfrac{m}{p} = \dfrac{p-m}{p}$ ...(iv)

(iv) en (ii):

$\dfrac{p}{p-m} + \dfrac{k}{r} = 1 \Rightarrow \dfrac{k}{r} = 1 - \dfrac{p}{p-m} = \dfrac{p-m-p}{p-m}$

$\dfrac{r}{k} = \dfrac{m-p}{m}$ ...(v)

(v) en (iii):

$\dfrac{m-p}{m} + \dfrac{s}{t} = 1 \Rightarrow \dfrac{s}{t} = 1 - \dfrac{m-p}{m} = \dfrac{m-m+p}{m}$

$sm = tp$ ...(vi)

Luego:

$\left((x^2y^4z^6)^{3pt}\right)^{\frac{1}{ms}} \Rightarrow$ grado = 36

Clave D

41. Determinando por separado:

- $A(B(x)) = 3B(x) - 2$

  $= 3(2x^2 - 7x + 3) - 2$

  $= 6x^2 - 21x + 9 - 2$

  $\boxed{A(B(x)) = 6x^2 - 21x + 7}$

- $B(A(x)) = 2A^2(x) - 7A(x) + 3$

  $= 2(3x - 2)^2 - 7(3x - 2) + 3$

  $\boxed{B(A(x)) = 18x^2 - 45x + 25}$

Luego:

$C(x) = (6x^2 - 21x + 7)(18x^2 - 45x + 25)$

$TI(C) = C(0) = 7(25)$

Coef. término lineal = (–21)25 + 7(–45)

$\dfrac{TI_{(C(x))}}{\text{Coef. término lineal}} = \dfrac{7(25)}{(-21)(25) + 7(-45)} = -\dfrac{5}{24}$

Clave E

42. Por ser un polinomio completo y ordenado ascendentemente concluimos que:

$a^{3a} - 19\,683 = 0$

$a^{3a} = 3^{3(3)}$

$a = 3$

Se considera por ser un polinomio completo:

N.° términos = grado polinomio + 1

$8a^a = (b^3 - 1) + 1$

$8a^a = b^3 \ \Rightarrow\ 8(3)^3 = b^3 \ \Rightarrow\ b = 6$

Luego:

$Z = (\sqrt[3]{6-2})^{3^2-6} = 4$

Clave B

PRODUCTOS NOTABLES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 17) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

Clave C

2. Binomio al cuadrado
Binomio al cubo

Legendre
Lagrange

Argand
Gauss

Diferencia de cuadrados
Diferencia de cubos

Razonamiento y demostración

3. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$5^2 = a^2 + b^2 + 2(6) \Rightarrow a^2 + b^2 = 25 - 12$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 13$

Clave C

4. $M = (x^4 - x^{-4})^2 - (x^4 + x^{-4})^2$

$M = -[(x^4 + x^{-4})^2 - (x^4 - x^{-4})^2]$

$M = -4x^4 \,.\, x^{-4}$

$M = -4$

Clave D

5. $a + b = (5 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 3)$

$\Rightarrow\quad a + b = 2$

Piden:

$a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$
$= (a+b)^2$
$= 2^2$

$\therefore a^2 + b^2 + 2ab = 4$

Clave D

6. $S = \sqrt[3]{(\sqrt{7}^2 - 1)(\sqrt{13}^2 - \sqrt{11}^2) - 4}$

$S = \sqrt[3]{(7-1)(13-11) - 4}$

$S = \sqrt[3]{6.2 - 4} = \sqrt[3]{8}$

$\therefore\ S = 2$

Clave E

7. $E = \sqrt[3]{3 + \sqrt{8}} \,.\, \sqrt[3]{3 - \sqrt{8}}$

$E = \sqrt[3]{(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8})}$

$E = \sqrt[3]{3^2 - \sqrt{8}^2}$

$E = \sqrt[3]{9 - 8} = 1$

Clave E

8. $(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1)$

Por suma de cubos:

$(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 + (1)^3$
$= 3 + 1 = 4$

Clave D

9. $(p^5 + 5)(25 + p^{10} - 5p^5) - 125$

$= \underbrace{(5 + p^5)(25 - 5p^5 + p^{10})}_{\text{Suma de cubos}} - 125$

$= 5^3 + (p^5)^3 - 125 = p^{15}$

Clave E

Resolución de problemas

10. $a + b = 7 \Rightarrow a^2 + \underbrace{2ab}_{11} + b^2 = 49$

Luego: $a^2 + 22 + b^2 = 49 \Rightarrow a^2 + b^2 = 27$

$\therefore\ \sqrt[3]{a^2 + b^2} = \sqrt[3]{27} = 3$

Clave C

11. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(2\sqrt{6})^3 = a^3 + b^3 + 3\,.\,3.2\sqrt{6}$

$48\sqrt{6} = a^3 + b^3 + 18\sqrt{6}$

$30\sqrt{6} = a^3 + b^3$

$\therefore E = \dfrac{a^3 + b^3}{5\sqrt{6}} = \dfrac{30\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} = 6$

Clave C

Nivel 2 (página 17) Unidad 1

Comunicación matemática

12. Identidad de Lagrange.
Diferencia de cuadrados.
Identidad de Legendre.
Identidad de Gauss.
Identidad de Steven.
Identidad de Cauchy.
Diferencia de cubos.

13.

Clave C

Razonamiento y demostración

14. $(a+b)^2 = (6\sqrt{2})^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = 72$

$a^2 + 2\,.\,20 + b^2 = 72 \Rightarrow a^2 + b^2 = 32$

$\therefore P = \sqrt[3]{a^2 + b^2 - 5} = \sqrt[3]{32 - 5} = \sqrt[3]{27} = 3$

Clave E

15. $\dfrac{x^2 + 1}{x} = 4$

$x + \dfrac{1}{x} = 4$

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 4^2$

$x^2 + 2x.\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 16$

$x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = 16$

$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 14$

Clave A

16. Dato:

$a^2 - 5a - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 5a$

$a - \dfrac{1}{a} = 5 \Rightarrow \left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2 = 5^2$

$a^2 - 2a\,.\,\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} = 25$

$\therefore E = a^2 + \dfrac{1}{a^2} = 27$

Clave C

17. $E = (x + 3 + y)(x + 3 - y) - (x^2 - y^2)$

$E = (x+3)^2 - y^2 - x^2 + y^2$

$E = x^2 + 6x + 9 - x^2$

$\therefore\ E = 6x + 9$

Clave C

18. $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)(x + 4) + (x + 4)(4 - x)$

$= (x - 2^2)(x + 4) - (x + 4)(x - 4)$

$= x^2 - 4^2 - x^2 + 4^2 = 0$

Clave A

19. $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9})$

$= \underbrace{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{3})\left[(\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2\right]}_{\text{Suma de cubos}}$

$= (\sqrt[3]{4})^3 + (\sqrt[3]{3})^3 = 4 + 3 = 7$

Clave C

20. $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})$

$= \underbrace{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})\left[(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\ \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2\right]}_{\text{Diferencia de cubos}}$

$= (\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 5 - 2 = 3$

Clave C

Resolución de problemas

21. $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = (2\sqrt{6})^2$

$x^2 + 2x.\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 24$

$x^2 + 2 + x^{-2} = 24$

$\Rightarrow x^2 + x^{-2} = 22$

Piden:

$\sqrt{x^2 + x^{-2} + 3} = \sqrt{22 + 3} = \sqrt{25}$
$= 5$

Clave E

22. $M = \dfrac{(\sqrt{3} + 2)^2 - (\sqrt{3} - 2)^2}{(\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)^2}$

Por identidad de Legendre:

$M = \dfrac{4(\sqrt{3})(2)}{4(\sqrt{3})(1)} = \dfrac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow M = 2$

Clave B

Nivel 3 (página 18) Unidad 1

Comunicación matemática

23. FFVF

Clave A

24.

Razonamiento y demostración

25. $A = [x^2 + 4x + 4 - (x^2 + 2x + 1)]$
$[x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 2x + 1)]$

$A = (2x + 3)(-2x + 3) = (3 + 2x)(3 - 2x)$

$\therefore A = 3^2 - (2x)^2 = 9 - 4x^2$

Clave A

26. $(a - b)^2 = (3\sqrt{3})^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = 27$

$a^2 - 2 . 2 + b^2 = 27 \Rightarrow a^2 + b^2 = 31$

$\therefore\ S = \sqrt{a^2 + b^2 + (ab)^2 + 1}$

$= \sqrt{31 + 2^2 + 1} = 6$

Clave A

27. $(\sqrt{3} + 2)^2 = \sqrt{3}^2 + 4\sqrt{3} + 4$

$= 7 + 4\sqrt{3}$

$(\sqrt{3} + 2)^4 = \left[(\sqrt{3} + 2)^2\right]^2 = [7 + 4\sqrt{3}]^2$

$= 49 + 56\sqrt{3} + 48$

$= 97 + 56\sqrt{3}$

$\therefore\ M = (97 + 56\sqrt{3}) - 56 - 56\sqrt{3} = 41$

Clave A

28. $(a + b)^2 = 4ab$ (dato)

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$

$a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$(a - b)^2 = 0$

$\Rightarrow a = b$

Reemplazamos:

$$E = \frac{2a^2b - 5ab^2}{3b^3} = \frac{2a^3 - 5a^3}{3a^3} = \frac{-3a^3}{3a^3}$$

$\therefore\ E = -1$

Clave B

29. $M = \sqrt{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})}$

$M = \sqrt{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2} = \sqrt{x^2 - x^2 + 1}$

$\therefore\ M = 1$

Clave C

30. $x^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3}$

$x^2 = 4 + 2\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$

$x^2 = 4 + 2\sqrt{4 - \sqrt{3}^2} \Rightarrow x^2 = 6$

$\therefore\ E = (x^2)^2 - 8 = 6^2 - 8 = 28$

Clave D

31. Datos: $a + b = 2 \wedge ab = 1$

Por binomio al cuadrado:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(2)^2 = a^2 + b^2 + 2(1)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2$

Por identidad de Cauchy:

$(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2)$

$2^3 = a^6 + b^6 + 3(1)^2\ (2)$

$\Rightarrow\ a^6 + b^6 = 8 - 6$

$a^6 + b^6 = 2$

Clave C

32. $S = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1) - x^6$

$S = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) - x^6$

$S = (x^3 - 1)(x^3 + 1) - x^6$

$S = x^6 - 1 - x^6 = -1$

Clave A

Resolución de problemas

33. $$B = \frac{-7abc}{a((b + a)(b - a) + c(b - a)) + b((c + b)(c - b) + a(c - b)) + c((a + c)(a - c) + b(a - c))}$$

$$B = \frac{-7abc}{(a + b + c)(a(b - a) + b(c - b) + c(a - c))}$$

$$B = \frac{7abc}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)} \ ...(1)$$

De la identidad de Gauss:

$\underbrace{a^3 + b^3 + c^3}_{0\ (\text{dato})} - 3abc = (a + b + c)\ (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

$\Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = -3abc \ ...(2)$

Reemplazamos (2) en (1):

$$B = \frac{7abc}{-3abc} = -\frac{7}{3}$$

Clave E

34. De la condición:

$a + b + c = 3$ ...(I)

$ab + ac + bc = 35/9$ ...(II)

$(a + b)(a + c)(b + c) = 20/3$ ...(III)

De los desarrollos de un trinomio al cubo:

- $\underbrace{(a + b + c)^3}_{(I)} = a^3 + b^3 + c^3 + 3\underbrace{(a + b)(a + c)(b + c)}_{(III)}$

  $3^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 20$

  $a^3 + b^3 + c^3 = 7$ ...(IV)

- $\underbrace{(a + b + c)^3}_{(I)} = \underbrace{a^3 + b^3 + c^3}_{(IV)} + 3\underbrace{(a + b + c)}_{(I)}\underbrace{(ab + ac + bc)}_{(II)} - 3abc$

  $3^3 = 7 + 3(3)\left(\frac{35}{9}\right) - 3abc$

  $abc = 5$

Clave E

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 21) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

S	W	T	A	B	N	F	G	H	J	K	O
T	S	E	T	R	A	C	S	E	D	P	Q
F	G	Q	H	R	V	J	T	D	U	K	V
M	A	N	O	I	P	U	S	I	R	B	O
P	X	I	I	C	O	E	H	U	D	Y	C
Z	H	D	E	S	L	H	F	D	N	H	M
P	O	O	P	W	I	F	J	Q	T	E	S
B	N	Y	R	F	I	R	U	F	F	Z	Y
P	O	L	I	N	O	M	I	C	A	R	N
A	S	R	I	E	E	D	T	G	W	L	E
T	X	F	W	K	K	R	C	L	M	Q	R
M	Q	U	A	P	J	Z	N	B	H	O	R

2.

1	3	a	5	b
a		k	p	
–b			q	8
	k	m	n	r

- $k = 3$; ▪ $ak = k$
  $\Rightarrow a = 1$; $-bk = p \Rightarrow p = -3b$ ...(I)
- $a + k = m \Rightarrow 1 + 3 = m \Rightarrow m = 4$
- $am = q \Rightarrow (1)(4) = q \Rightarrow q = 4$
- $-bm = 8 \Rightarrow b = -\frac{8}{4} = -2$
- $5 + p + q = n$ ...(II)

  "b" en (I): $p = -3(-2) = 6$

  p y q en (II): $5 + 6 + 4 = n \Rightarrow n = 15$
- $b + 8 = r \Rightarrow -2 + 8 = r \Rightarrow r = 6$

  Nos piden:
  $T = 3 + 2(4) + 3(15) + 21(6) + 5(4) + 21(6) = 328$

Clave E

3.

	a	1	b	2	c	3
n	↓	3	m	10	p	n
	a	4	5	12	1	q

Del esquema se observa que:
$5n = 10 \Rightarrow n = 2$
$an = 3$ ...(1)
$b + m = 5$ ...(2)
$c + p = 1$ ...(3)
$3 + n = q$
$\Rightarrow q = 5$ ...(4)
$\Rightarrow (1) + (2) + (3) + (4)$:
$an + b + m + c + p + q = 14$

Nos piden:
$an + b + c + m + n + p + q = 16$

Clave D

Razonamiento y demostración

4. $\dfrac{x^4 - 3x^3 + mx - 2n}{x^2 - 2x + 4}$; $R = 0$

Por el método de Horner:

1	1	–3	0	m	–2n
2		2	–4		
–4			–2	4	
				–12	24
	1	–1	–6	0	0

Por ser división exacta:
$m + 4 - 12 = 0 \Rightarrow m = 8$
$-2n + 24 = 0 \Rightarrow n = 12$

Clave A

5. $\dfrac{5x^4 - 11x^3 + 15x^2 + ax - b}{5x^2 - x - 2}$; $R(x) = 2x - 9$

Por el método de Horner:

5	5	–11	15	a	–b
1		1	2		
2			–2	–4	
				3	6
	1	–2	3	2	–9

Se observa que:
$a - 4 + 3 = 2 \Rightarrow a = 3$
$-b + 6 = -9 \Rightarrow b = 15$
$\therefore a + b = 18$

Clave C

6. $\dfrac{x^5 + x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

Aplicamos el método de Horner:

1	1	0	0	0	1	1
2		2	–1			
–1			4	–2		
				6	–3	
					8	–4
	1	2	3	4	6	–3

$\therefore R(x) = 6x - 3$

Clave C

7. $\dfrac{x^4 + ax + 3b}{x^2 + x + 1}$; $R(x) = 0$

Por Horner:

1	1	0	0	a	3b
–1		–1	–1		
			1	1	
–1				0	0
	1	–1	0	0	0

Se observa que: $3b = 0 \Rightarrow b = 0$
$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ $\therefore$ $a + b = -1 + 0 = -1$

Clave B

8. $\dfrac{ax^2+bx+2}{(x-2)(x-a)}$; $R(x)=0$

1	a	b	2
(a + 2)		a(a + 2)	$-2a^2$
−2a		↓	↓
	a	0	0

Luego:
$2-2a^2=0 \Rightarrow 2a^2=2 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=1$
$b+a(a+2)=0 \Rightarrow b+3=0 \Rightarrow b=-3$
Nos piden: $4(2a+b)=4(2-3)=-4$

Clave A

9. Por Horner:

3	6	11	α	−β
−1		−2	2	
1			−3	3
			↓	↓
	2	3	0	0

Luego:
$\alpha+2-3=0 \Rightarrow \alpha=1$
$-\beta+3=0 \Rightarrow \beta=3$

Nos piden:
$\alpha-\beta=1-3=-2$

Clave B

10.

1	1	m	n	0	0	0
−2		−2	−3			
−3			−2A	−3A		
				−2B	−3B	
					−2C	−3C
	1	A	B	C	0	0

Luego:
$-3C=0 \Rightarrow C=0$
$-3B-2C=0 \Rightarrow B=C=0$
$-3A-2B=C \Rightarrow A=0$

Como:
- $m-2=A \Rightarrow m=2$
- $n-3-2A=B$
  $\Rightarrow n=3 \quad \therefore\ mn=6$

Clave E

11.

	5	9	−7	n	m	2
$x=\frac{1}{5}$	↓	1	2	−1	$\frac{n-1}{5}$	1
÷ 5	5	10	−5	(n−1)	5	3 → dato
	1	2	−1	$\frac{n-1}{5}$	1	

$\Sigma\text{coef.}q(x)=3+\dfrac{n-1}{5}=2 \Rightarrow n=-4$

Luego: $m+\dfrac{n-1}{5}=5 \Rightarrow m=6$

Nos piden: $m+n=2$

Clave A

12. $\dfrac{16x^4+2x+1}{-2x-1}$

Aplicamos la regla de Ruffini: $d(x)=-2x-1=0 \Rightarrow x=-1/2$

	16	0	0	2	1
$x=-\frac{1}{2}$		−8	4	−2	0
÷ −2	16	−8	4	0	1
	−8	4	−2	0	

$q(x)=-8x^3+4x^2-2x+0$

Dato: $q(x)=\left(\frac{a}{3}-1\right)x^3+\left(\frac{b}{4}-2\right)x^2+\left(\frac{c}{5}-3\right)x+\left(\frac{d}{6}-4\right)$

Igualando coeficientes:

$\frac{a}{3}-1=-8 \Rightarrow a=-21 \qquad \frac{b}{4}-2=4 \Rightarrow b=24$

$\frac{c}{5}-3=-2 \Rightarrow c=5 \qquad \frac{d}{6}-4=0 \Rightarrow d=24$

Nos piden:
$a+b+c-d=-21+24+5-24=-16$

Clave B

13. Por Ruffini: $d(x)=x-a+b=0 \Rightarrow x=a-b$

	1	(b − a)	1	−(a − b)	(a^2+ab+b^2)	(a^3+b^3)
a − b		a − b	0	a − b	0	(a^3-b^3)
	1	0	1	0	(a^2+ab+b^2)	$2a^3$

$\therefore R(x)=2a^3$

Clave C

14. Aplicando Ruffini:

	1	0	0	...	−(n + 2)	n + 1
1	↓	1	1	...	1	−n −1
	1	1	1	...	$\underbrace{-n-1}_{-5}$	0

$-n-1=-5 \Rightarrow n+1=5 \Rightarrow n=4$
$\Rightarrow G(q)=G(D)-G(d) \Rightarrow G(q)=(n-1)-1=n-2$
$\therefore G(q)=2$

Clave D

15. Por Ruffini: $d(x)=x-1=0 \Rightarrow x=1$

	5	−10	3	2
x = 1	↓	5	−5	−2
	5	−5	−2	0

Luego: $q(x)=5x^2-5x-2$ $\qquad \dfrac{q(x)}{x-2}$; $R(x)=?$

Por Ruffini: $d(x)=x-2=0 \Rightarrow x=2$

	5	−5	−2
2	↓	10	10
	5	5	8

$\therefore R(x)=8$

Clave D

16. Por teorema del resto: $d(x)=x^n-1=0 \Rightarrow x^n=1$
$D(x)=x^n+x^{3n}+x^{2n+1}+x^{n+2}+5$

Dando forma: $D(x)=x^n+(x^n)^3+(x^n)^2x+(x^n)x^2+5$

Reemplazamos se obtiene: $R(x) = 1 + 1 + x + x^2 + 5$

$R(x) = x^2 + x + 7$

Clave B

17. Por teorema del resto: $d(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = -1$

$D(x) = x^4 + 2x^2 + 5 = (x^2)^2 + 2x^2 + 5$

Reemplazamos: $R(x) = (-1)^2 + 2(-1) + 5 = 4$

Clave A

18. $\dfrac{nx^n - x + n}{x - 1}$

Por teorema del resto: $d(x) = x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$D(x) = nx^n - x + n$ ...(I)

Reemplazamos en (I): $R(x) = n(1)^n - 1 + n$

$R(x) = 2n - 1$

Clave B

19. $\dfrac{7x^{31} + 5x^{12} - 2x^8 + x^5 - 1}{x^2 - 1}$

Por teorema del resto: $d(x) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

Luego: $D(x) = 7x^{31} + 5x^{12} - 2x^8 + x^5 - 1$

Buscamos la variable x^2: $D(x) = 7(x^2)^{15}x + 5(x^2)^6 - 2(x^2)^4 + x(x^2)^2 - 1$ ...(I)

Reemplazamos en (I): $R(x) = 7(1)^{15} \cdot x + 5(1)^6 - 2(1)^4 + x(1)^2 - 1$

$R(x) = 7x + 5 - 2 + x - 1 = 8x + 2$

Clave B

20. $\dfrac{x^6 + 3x^5 + 2x - 1}{x + 3}$

Por teorema del resto: $d(x) = x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$D(x) = x^6 + 3x^5 + 2x - 1$

Reemplazamos: $R(x) = (-3)^6 + 3(-3)^5 + 2(-3) - 1$

$R(x) = 3^6 - 3^6 - 7 = -7$

Clave D

21. $\dfrac{x^5 + \alpha x + 2}{x - 1}$; $R(x) = 0$

Por teorema del resto: $d(x) = x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Luego: $D(x) = x^5 + \alpha x + 2$

Reemplazamos: $R(x) = 1^5 + \alpha(1) + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -3$

Clave A

22. $\dfrac{(x - n + 1)^2 + (x - n)^2 + (x - n - 1)^2 + ... + (x - 2n + 2)^2}{x - 2n + 1}$

Por teorema del resto:

$d(x) = x - 2n + 1 = 0 \Rightarrow x = 2n - 1$

$D(x) = (x - n + 1)^2 + (x - n)^2 + (x - n - 1)^2 + ... + (x - 2n + 2)^2$

Reemplazamos: $R(x) = n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + ... + 2^2 + 1^2$

Suma de los n números naturales al cuadrado: $R(x) = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

Clave D

23. Por teorema del resto en la división:

$x^n + n + 1 = 0$

$x^n = -n - 1$

Reemplazamos en el dividendo: $x^{n+1} + x^n + n + 1$

$= x^n \cdot x + (-n - 1) + n + 1$

$= (-n - 1)x - n - 1 + n + 1 = (-n - 1)x$

Dato: $R(x) = (n - 17)x$

Entonces: $(-n - 1)x = (n - 17)x$

$\Rightarrow -n - 1 = n - 17$

$n = 8$

Piden: $\sqrt{n} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Clave E

24. Por teorema del resto en la división: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Reemplazamos en el dividendo:

$ax^3 + 6x^2 + bx - 6 = a(1)^3 + 6(1)^2 + b(1) - 6$

$= a + 6 + b - 6 = a + b$

Dato: $R(x) = 2\sqrt{(a + b)(b - 6)}$

Igualamos: $a + b = 2\sqrt{(a + b)(b - 6)}$

$(a + b)^2 = 4(a + b)(b - 6)$

$a + b = 4(b - 6)$

$\dfrac{a + b}{b - 6} = 4$

Clave B

25. $\dfrac{(x - 1)^{10}(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{(x - 1)^9(x + 2)}{x - 2}$

Aplicamos el teorema del resto: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Reemplazamos $x = 2$ en el dividendo: $(2 - 1)^9(2 + 2) = 4$

Se multiplica por el factor simplificado inicialmente:

$\therefore R(x) = 4(x - 1) = 4x - 4$

Clave C

26. Si $x + 1$ es factor de $x^2 + cx - 2$, entonces: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$(-1)^2 + c(-1) - 2 = 0$

$1 - c - 2 = 0 \Rightarrow c = -1$

Como $(2x - 1)$ es factor de $Dx^2 + 5x - 4$, entonces: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{D}{4} + \dfrac{5}{2} - 4 = 0$

$\dfrac{D}{4} = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow D = 6$ $\qquad \therefore \dfrac{D}{3c} = \dfrac{6}{-3} = -2$

Clave D

Resolución de problemas

27.

	1	2	3	4		(m – 2)	(m – 1)	m	(m + 1) { n.° términos
x – 1 = 0	m	0	0	0	...	0	0	120	m
x = 1		m	m	m	...	m	m	m	120 + m
	m	m	m	m	...	m	m	120 + m	120 + 2m

Cociente

Nos piden:

$Q(x) = \underbrace{m + m + m ... + m + m + (120 + m)}_{\text{"m" sumandos}}$

$Q(x) = m^2 + 120$

Clave D

28. Por el teorema del resto: $x + y + z = 0$

Recordamos productos notables, si:

$x + y + z = 0 \Rightarrow (x + y)(x + z)(y + z) + xyz = 0$

Reemplazamos en el dividendo:

$D(x; y; z) = (x + y)(x + z)(y + z) + \left(\psi - 2^{2^2}\right)xyz$

$$R(x; y; z) = -xyz + \left(\psi - 2^{2^2}\right)xyz$$
$$= xyz\left(\psi - 2^{2^2} - 1\right)$$

Como la división es exacta, entonces:

$R(x, y, z) \equiv 0 \Rightarrow \psi - 2^{2^2} - 1 = 0 \Rightarrow \psi = 17$

Clave D

Nivel 2 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

29.

4	a	b	0	c	d
$-m + 2$		$-5m + 10$	$5m + 5$		
$m + 1$			$-m^2 + 2m$	$m^2 + m$	
				$-mn + 2n$	$mn + n$
	5	m	n	p	q

- $\frac{a}{4} = 5 \Rightarrow a = 20$
- $b - 5m + 10 = 4m \Rightarrow b = 9m - 10$ ...(i)
- $-m^2 + 7m + 5 = 4n$ ...(ii)
- $c + m^2 + m - mn + 2n = p$
  $c = p - m^2 - m + mn - 2n$ ...(iii)
- $d + mn + n = q \Rightarrow d = q - mn - n$ ...(iv)
  a + (i) + (ii) + (iii) y (iv):
  $(a + b + c + d) - (m + n + p + q) = 5$

Clave E

30. MEMORIA

Razonamiento y demostración

31. $\dfrac{ABx^4 + (A + B^2)x^3 + Bx^2 + (A + B^2)x + A}{Ax^2 + Bx + A}$

$R(x) = Bx + A$

Por el método de Horner:

A	AB	$(A + B^2)$	B	$(A + B^2)$	A
$-B$		$-B^2$	$-AB$		
$-A$			$-B$	$-A$	
				B^2	AB
	B	1	$-B$	B	A

Se observa que:

$A + AB = A \Rightarrow AB = 0$ ...(I)

$B^2 + B^2 = B$

$2B^2 = B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

De (I): $A = 0$

Nos piden: $\dfrac{A - 1}{B} = \dfrac{0 - 1}{\frac{1}{2}} = -2$

Clave A

32. $\dfrac{12x^4 - 23x^3 + 8mx^2 - 35x + n}{4x^2 - 5x + m}$

Por Horner:

4	12	-23	8m	-35	n
5		15	$-3m$		
$-m$			-10	2m	
				$5\left(\frac{5m - 10}{4}\right)$	$-m\left(\frac{5m - 10}{4}\right)$
	3	-2	$\left(\frac{5m - 10}{4}\right)$	2	-3

Luego:

$2m + 5\left(\frac{5m - 10}{4}\right) - 35 = 2 \Rightarrow m = 6$

$n - m\left(\frac{5m - 10}{4}\right) = -3 \Rightarrow n = 27$

Nos piden: $n - m = 21$

Clave B

33. $\dfrac{3ax^5 + (a + 3)x^4 + (4a - 2)x^3 - 4ax^2 + 9ax - 2a}{3x - 2}$

Aplicamos la regla de Ruffini: $d(x) = 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

	3a	$(a + 3)$	$(4a - 2)$	$-4a$	9a	$-2a$
$\frac{2}{3}$		2a	$2a + 2$	4a	0	6a
$\div 3$	3a	$(3a + 3)$	6a	0	9a	4a
	a	$(a + 1)$	2a	0	3a	

Dato: Σcoef. $Q(x) = 2R(x)$

Reemplazamos: $a + (a + 1) + 2a + 3a = 2(4a)$

$7a + 1 = 8a \Rightarrow a = 1$

Clave A

34. $\dfrac{(\sqrt{2} + 1)x^4 - 2(\sqrt{2} + 2)x^3 + (\sqrt{2} + 4)x + 2}{x - \sqrt{2} - 1}$

Por la regla de Ruffini: $d(x) = x - \sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} + 1$

	$\sqrt{2} + 1$	$-2(\sqrt{2} + 2)$	0	$(\sqrt{2} + 4)$	2
$\sqrt{2} + 1$		$(3 + 2\sqrt{2})$	$-(\sqrt{2} + 1)$	$-(3 + 2\sqrt{2})$	-1
	$\sqrt{2} + 1$	-1	$-(\sqrt{2} + 1)$	$(1 - \sqrt{2})$	1

$R(x) = 1$

Clave A

35. $\dfrac{(\sqrt{3} - 1)x^4 - (1 + \sqrt{3})x^3 + 2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x - 2\sqrt{3} - 1}{x - \sqrt{3} - 1}$

Por la regla de Ruffini: $d(x) = x - \sqrt{3} - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} + 1$

	$(\sqrt{3} - 1)$	$-(1 + \sqrt{3})$	2	$(\sqrt{3} + 1)$	$-(2\sqrt{3} + 1)$
$\sqrt{3} + 1$		2	-2	0	$(4 + 2\sqrt{3})$
	$(\sqrt{3} - 1)$	$(1 - \sqrt{3})$	0	$(\sqrt{3} + 1)$	3

Nos piden:

Σcoef. $q(x) = (\sqrt{3} - 1) + (1 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} + 1$

Clave B

36. $\dfrac{3x^2 + mx + 5}{x + 2}$; $R_1(x) = ?$

Por teorema del resto: $d(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$D(x) = 3x^2 + mx + 5$ ...(I)

Reemplazamos en (I): $R_1(x) = 3(-2)^2 + m(-2) + 5$

$R_1(x) = 17 - 2m$

$\dfrac{2x^2 - x + 1}{x + 2}$; $R_2(x) = ?$

Por teorema del resto: $d(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$D(x) = 2x^2 - x + 1$ ...(II)

Reemplazamos en (II): $R_2(x) = 2(-2)^2 - (-2) + 1$

$R_2(x) = 11$

Dato: $R_1(x) = R_2(x) \Rightarrow 17 - 2m = 11 \Rightarrow m = 3$

Clave B

37. Sabemos que: $R(x) = (n + 1)(4b)^{n+1}$ ...(I)

Por teorema del resto: $d(x) = x - a + b = 0 \Rightarrow x = a - b$

Luego:

$D(x) = (a - b)x^n + (a - b)^2x^{n-1} + (a - b)^3x^{n-2} + \ldots + (a - b)^{n+1}$

Reemplazamos:

$R(x) = \underbrace{(a - b)(a - b)^n + (a - b)^2(a - b)^{n-1} + \ldots + (a - b)^{n+1}}_{(n+1)\text{ términos}}$

$R(x) = \underbrace{(a - b)^{n+1} + (a - b)^{n+1} + \ldots + (a - b)^{n+1}}_{(n+1)\text{ términos}}$

Reducimos:

$R(x) = (n + 1)(a - b)^{n+1}$ ... (II)

De (I) y (II):

$(n + 1)(4b)^{n+1} = (n + 1)(a - b)^{n+1}$

$(4b)^{n+1} = (a - b)^{n+1} \Rightarrow 4b = a - b$

$a = 5b \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 5$

Clave D

38. $\dfrac{(x^2 + 5x + 9)^n + x^2(x + 5)^2 + 2}{x^2 + 5x + 8}$

Por teorema del resto: $d(x) = x^2 + 5x + 8 = 0$

$x^2 + 5x = -8$

$D(x) = (x^2 + 5x + 9)^n + x^2(x + 5)^2 + 2$

$D(x) = (\underbrace{x^2 + 5x}_{-8} + 9)^n + (\underbrace{x^2 + 5x}_{-8})^2 + 2$

$R(x) = (9 - 8)^n + (-8)^2 + 2 = 67$

Clave E

39. $\dfrac{(x^2 + 5x + 1)^3 - 3(x^2 + 5x + 2)^2 - 1}{x^2 + 5x - 1}$ ...(1)

Aplicamos el teorema del resto: $x^2 + 5x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x = 1$ ...(2)

Reemplazamos (2) en el dividendo:

$R(x) = (1 + 1)^3 - 3(1 + 2)^2 - 1$

$R(x) = 2^3 - 3(3)^2 - 1 = 8 - 27 - 1$

$\therefore R(x) = -20$

Clave B

40. $\dfrac{x^6(x - 2)^6 + 16x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2}$

$\dfrac{(x^2 - 2x)^6 + 16(x^2)^2 + 2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2}$

Aplicamos el teorema del resto: $x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = -2$

Reemplazamos en el dividendo: $(-2)^6 + 16(2x - 2)^2 + 2(2x - 2) - 3$

$64 + 64(\underbrace{x^2 - 2x}_{-2} + 1) + 4x - 7$

$\underbrace{64 + 64(-2 + 1)}_{0} + 4x - 7$ $\therefore R(x) = 4x - 7$

Clave E

41. Sabemos que: $D(x) = \dfrac{(x + 2)^7 + 3(x + 2)^5 + x + 1}{(x + 1)(x + 3)}$

Por el teorema del resto: $d(x) = x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 4x = -3$ ...(1)

Luego:

$D(x) = [(x + 2)^2]^3(x + 2) + 3[(x + 2)^2]^2(x + 2) + x + 1$

$D(x) = (x^2 + 4x + 4)^3(x + 2) + 3(x^2 + 4x + 4)^2(x + 2) + x + 1$ ...(2)

Reemplazamos (1) en (2):

$R(x) = (x + 2) + 3(x + 2) + x + 1$

$R(x) = 5x + 9$

Por lo tanto: el término independiente del resto es: 9

Clave E

42. $\dfrac{P(x)}{(x + 1)(x + 2)(x^4 + 1)}$; $R(x) = 3x - 2$

Sabemos que: $D(x) = d(x)\,q(x) + R(x)$

Reemplazamos: $P(x) = (x + 1)(x + 2)(x^4 + 1)q(x) + 3x - 2$ ...(I)

$\dfrac{P(x)}{x + 2} \Rightarrow R(x) = P(-2) = ?$

En (I): $x = -2 \Rightarrow P(-2) = 3(-2) - 2 = -8$

$R_1(x) = -8$

$\dfrac{P(x)}{x + 1} \Rightarrow R_2(x) = P(-1) = ?$

En (I): $x = -1 \Rightarrow P(-1) = 3(-1) - 2 = -5$

$R_2 = -5$

Clave B

Resolución de problemas

43. Empleamos el método de Horner:

	1	M	5M + 7	35 – 2M	N–14	5N	–2N
–5			–5M	2M			
2				–35	14		
					0	0	
						–5N	2N
		M	7	0	N	0	0

$Q(q) = Mq^3 + 7q^2 + N$

$q = 3 \Rightarrow Q(3) = M(3)^3 + 7(3)^2 + N = 313$

$M = \dfrac{250 - N}{27}$

Por dato: como $M, N \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ Analizamos y evaluamos los valores apropiados:

$M = 9, N = 7$

Luego: $\sqrt[7]{M^N} = \sqrt[7]{M^7} = 9$

Clave C

44. $x^3 + (a+b+c)x^2 + (a^2+b^2)x + 8 = (x^3 - c^2x - abc) \cdot 1 + x^2 + 3x + 9$

$= x^3 - c^2x - abc + x^2 + 3x + 9 = x^3 + x^2 + (3 - c^2)x + 9 - abc$

$\Rightarrow a + b + c = 1$

$\wedge\ a^2 + b^2 = 3 - c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 3$

$\wedge\ 9 - abc = 8 \Rightarrow abc = 1$

$\Rightarrow (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$1 = 3 + 2(ab+bc+ac) \Rightarrow (ab+bc+ac) = -1$

$\Rightarrow (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$

$1 = a^3+b^3+c^3+3(1)(-1) - 3(1)$

$a^3+b^3+c^3 = 1+3+3 = 7 \qquad \therefore a^3+b^3+c^3 = 7$

Clave E

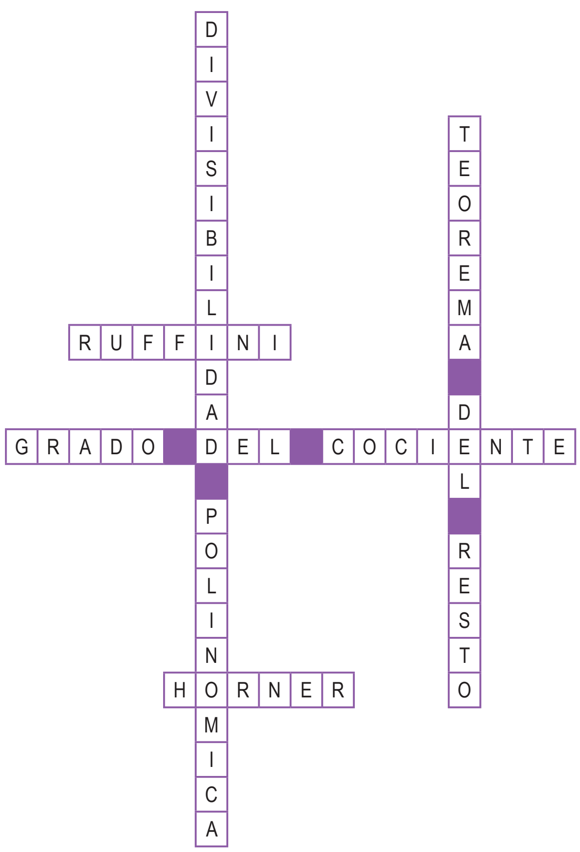
Nivel 3 (página 24) Unidad 1

Comunicación matemática

45.
- $\frac{d}{a} = 2 \Rightarrow d = 2a$ ...(I)
- $h = 2b$ ...(II)
  $i = 2c$ ...(III)
- $h - e = 3a$ ...(IV)
- $3b = 12 \Rightarrow b = 4$
  "b" en (II): $h = 2(4) = 8 \Rightarrow h = 8$
  "h" en (IV): $8 - e = 3a \Rightarrow 8 = e + 3a$ ...(V)
  (con $e = 5$, $a = 1$)
  (V) – (I): $8 - d = e + 3a - 2a \Rightarrow e + a + d = 8$
  (con $d = 2$)

Clave D

46.



Razonamiento y demostración

47. Por Horner:

1	n	–(n + 1)	0	0	...	0	0	1
2		2n	–n					
–1			2(n – 1)	–(n – 1)				
				2(n – 2)	...			
	n	(n – 1)	(n – 2)	n – 3	...	1		

(n términos)

$n + n - 1 + n - 2 + ... + 1 \equiv 1 + 2 + 3 + ... + n$

Nos piden:

$\Sigma \text{coef. } Q(x) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Clave B

48. Sea: $P(x) = ax^{n+1} + bx + 1$

Dato: $\frac{P(x)}{(x-1)^2(cx+d)}$; $R(x) = 0$

$\frac{P(x)}{(x-1)^2} = \frac{P(x)}{x^2 - 2x + 1}$; $R(x) = 0$

Por Horner:

1	a	0	0	...	0	0	b	1
2		2a	–a					
–1			4a	...			–(n – 1)a	
							2na	–na
	a	2a	3a	...	(n – 1)a	na	0	0

(n términos)

$1 - na = 0 \Rightarrow a = 1/n$

$\Rightarrow\ b - (n-1)a + 2na = 0$

$\therefore\ b = -a(n+1) = -\frac{n+1}{n}$

Clave D

49. Por Ruffini: $d(x) = nx - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/n$

	n	$(n^2 - 1)$	$-n^2$	–1	$(n^2 - 2)$
$\frac{1}{n}$	↓	1	n	(1 – n)	–1
	n	n^2	n(1 – n)	–n	$(n^2 - 3)$
÷ n					
	1	n	(1 – n)	–1	

Dato: $\Sigma \text{coef. } Q(x) = R(x)$

$1 = n^2 - 3$

$n^2 = 4 \Rightarrow n = 2 \vee n = -2$

Nos piden: $(n - 2)$máx. $\qquad \therefore n - 2 = 2 - 2 = 0$

Clave C

50. Multiplicamos por (x – 1): $\frac{(x^{3a+2} + x^{3b+1} + mx^{3c})(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}$

Por teorema del resto: $d(x) = x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1$

$D(x) = x^{3a+3} + x^{3b+2} + mx^{3c+1} - x^{3a+2} - x^{3b+1} - mx^{3c}$

Reemplazamos:

$Rf(x) = 1 + x^2 + mx - x^2 - x - m$

$Rf(x) = m(x - 1) - (x - 1)$

Luego nos piden:

$R(x) = \dfrac{Rf(x)}{x-1} = \dfrac{(m-1)(x-1)}{x-1} \Rightarrow R(x) = m - 1$

Como es exacto: $R(x) = m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Clave B

51. Como $(x + 1)$ es factor de: $x^2 + cx + 2 \Rightarrow \dfrac{x^2+cx+2}{x+1}$; $R(x) = 0$

Por teorema del resto:

$d(x) = x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$D(x) = x^2 + cx + 2$

$R(x) = (-1)^2 + c(-1) + 2 = 0$

$c = 3$

Como $(2x - 1)$ es factor de $dx^2 + 5x - 4 \Rightarrow \dfrac{dx^2+5x-4}{2x-1}, R(x) = 0$

Por teorema del resto: $d(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$D(x) = dx^2 + 5x - 4$

$R(x) = d\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{1}{2}\right) - 4 = 0$

$\dfrac{d}{4} + \dfrac{5}{2} - 4 = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d = 6$

Nos piden: $\dfrac{c}{d} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Clave A

52. $\dfrac{(x+3)(x+a)(x+1)(x-2)}{x^2+x+2}$; $R(x) = 16x+4b$

$\dfrac{(x^2+x-6)(x^2+x+ax+a)}{x^2+x+2}$

Por teorema del resto:

$d(x) = x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x = -2$

$D(x) = (\underbrace{x^2 + x}_{-2} - 6)(\underbrace{x^2 + x}_{-2} + ax + a)$

Reemplazamos: $R(x) = (-2 - 6)(ax + a - 2)$

$R(x) = (-8)(ax + a - 2) = 16x + 4b$

$-8ax - 8(a - 2) = 16x + 4b$

Igualamos: $-8a = 16 \Rightarrow a = -2$

$-8(a - 2) = 4b \Rightarrow b = -2(-2 - 2) \Rightarrow b = 8$

Nos piden: $b - a = 8 - (-2) = 10$

Clave B

53. $\dfrac{P[Q(x+2)]}{Q(x+2)}$; $R(x) = ?$. Sea: $x + 2 \to x$

$\dfrac{P[Q(x)]}{Q(x)}; R(x) = ?$

Dato:

$P(x) = 1000x^2 + 100x + 10c$

$Q(x) = x^2 - x + 2$

$x \to x^2 - x + 2$

$P(Q(x)) = 1000(x^2 - x + 2)^2 + 100(x^2 - x + 2) + 10c$

Por el teorema del resto: $d(x) = x^2 - x + 2 = 0$

$D(x) = 1000(x^2 - x + 2)^2 + 100(x^2 - x + 2) + 10c$

Reemplazando:

$R(x) = 100(0)^2 + 100(0) + 10c = 30 \Rightarrow c = 3$

$2c - 1 = 2(3) - 1 = 5$

Clave D

54. Multiplicamos al dividendo y al divisor por $(x + 1)$ se tiene:

$\dfrac{(2x^{21} - 3x^{17} + 2x^5 - x + 3)(x+1)}{x^3+1}$

Por el teorema del resto:

$d(x) = x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

Luego:

$D(x) = [2(x^3)^7 - 3(x^3)^5x^2 + 2x^3x^2 - x + 3](x + 1)$ ...(I)

Remplazamos $x^3 = -1$ en (I) tenemos:

$R'(x) = (x^2 - x + 1)(x + 1) = x^3 + 1 = (-1) + 1$

$\Rightarrow R'(x) = 0$

Nos piden:

$R(x) = \dfrac{R'(x)}{x+1} = \dfrac{0}{x+1} = 0$ $\qquad \therefore R(x) = 0$

Clave C

55. $\dfrac{x^3+bx^2+cx+1}{x^2+x+1}$; $R(x) = 0$

Por el método de Horner:

1	1	b	c	1
–1		–1	–1	
–1			–(b –1)	–(b – 1)
	1	(b – 1)	0	0

Se observa que:

$1 - (b - 1) = 0 \Rightarrow b = 2$

$c - 1 - (b - 1) = 0 \Rightarrow b = c = 2$

Nos piden:

$\dfrac{b}{c} = \dfrac{2}{2} = 1$

Clave B

56. $\dfrac{ax^9+bx^8+1}{x^2-2x+1}$; $R(x) = 0$

Aplicamos el método de Horner invertido:

1	1	0	0	0	0	0	0	0	b	a
2		2	–1							
–1			4	–2						
				6	–3					
					8	–4				
						10	–5			
							12	–6		
								14	–7	
									16	–8
	1	2	3	4	5	6	7	8	0	0

Se observa que:

$b - 7 + 16 = 0 \Rightarrow b = -9$

Clave B

57. Datos:

$D(x) = (x-3)^{14} + (x-2)^{12} - x + 3$

$d(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$

Como el divisor es de grado 2, entonces el residuo tiene la siguiente forma:

$R(x) = ax + b$

Además:

$D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$

Reemplazamos:

$(x-3)^{14} + (x-2)^{12} - x + 3 = (x-3)(x-2)q(x) + ax + b$

Sea:

$x = 3 \Rightarrow 1 = 3a + b$ ...(1)

$x = 2 \Rightarrow 2 = 2a + b$ ...(2)

Resolvemos (1) y (2):

$\Rightarrow a = -1 \wedge b = 4$

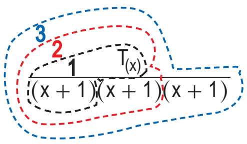
Nos piden: R(x)

$\therefore R(x) = ax + b = -x + 4$

Clave C

Resolución de problemas

58. Por Ruffini, veamos: $T(x) = x^{100} + ax^2 + bx + c$

Luego: 

Se tendrá que dividir 3 veces.

$x + 1 = 0$	1	0	0	0	...	0	a	b	c
$x = -1$		–1	1	–1	...	–1	1	–a–1	a + 1 – b
	1	–1	1	–1	...	–1	a + 1	b – a – 1	a + c + 1 – b = 0
$x = -1$		–1	2	–3	...	–97	98	–a – 99	
	1	–2	3	–4	...	–98	a + 99	b –2a – 100 = 0	
$x = -1$		–1	3	–6	...	–4753	4851		
	1	–3	6	–10	...	–4851	a+ 4950 = 0		

$a = -4950$; $b = -9800$; $c = -4851$

Nos piden: $a + c - b = -1$

Clave B

59. $\underbrace{P(x)}_{2.°} \equiv \underbrace{(x+2)(x+B)}_{2.°} + 6$

$P(x) \equiv (x + B + 3)\, Q(x)$

$x = -B - 3 \Rightarrow (-B - 3 + 2)(-B - 3 + B) + 6 = 0 \Rightarrow B = -3$

$P(x) = (x + 2)(x - 3) + 6$

$R = P(5) = (5 + 2)(5 - 3) + 6 = 20$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 28) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. Propiedad:

$$\frac{2m+3}{2m+1} = \frac{3m-3}{3m-5}$$

$\Rightarrow 6m^2 - m - 15 = 6m^2 - 3m - 3$

$\therefore m = 6$

Clave B

5. $\dfrac{(m^2)^5 - (y^3)^5}{m^2 + y^3} = m^8 - m^6y^3 + m^4y^6 - m^2y^9 + y^{12}$

$\therefore$ Tercer término es: m^4y^6

Clave B

6. $\dfrac{x^{3^3} - 3^{3^3}}{x^3 - 3^3} = \dfrac{x^{27} - 3^{27}}{x^3 - 3^3} = \dfrac{(x^3)^9 - (3^3)^9}{(x^3) - (3^3)}$

$t_3 = (x^3)^{9-3} \cdot (3^3)^{3-1}$

$t_3 = x^{18} \cdot 3^6$

Si: $x = 3$

$\Rightarrow t_3 = 3^{18} \cdot 3^6 = 3^{24}$

Clave E

7. Se cumple:

$\dfrac{36}{4} = \dfrac{189}{r+6} \Rightarrow r + 6 = 21$

$r = 15$

Clave B

8. Si genera un CN se cumple:

$\dfrac{65}{m+3} = \dfrac{78}{6} \Rightarrow m + 3 = \dfrac{65}{13}$

$m = 2$

Clave D

Resolución de problemas

9. $t_5 = (x^4)^{n-5}(y^5)^{5-1}$ n.° términos: n

$GA = 4(n-5) + 5(4) = 6(5) + 2 = 32$

$\therefore n = 8$

Clave B

10. $\dfrac{x^{4n+2} - y^{5n-7}}{x^2 - y^2} \Rightarrow n = 9$

$t_{11} = (x^2)^{\frac{4n+2}{2} - 11} \cdot (y^2)^{11-1} = x^{16}y^{20}$

$\therefore GA = 36$

Clave E

Nivel 2 (página 28) Unidad 1

Comunicación matemática

11.

12.

Razonamiento y demostración

13. $\dfrac{a^{32} - b^{72}}{a^4 - b^9} = \dfrac{(a^4)^8 - (b^9)^8}{a^4 - b^9}$

Dato:

$t_6 = (a^4)^{8-6} \cdot (b^9)^{6-1} = a^8 \cdot b^{m+5}$

$a^8 \cdot b^{45} = a^8b^{m+5}$

Luego:

$m + 5 = 45 \Rightarrow m = 40$

Clave B

14. $\dfrac{m^7 + n^7}{m + m} = m^6 - m^5n + m^4n^2 - m^3n^3 + m^2n^4 - mn^5 + n^6$

Se observa que: $t_4 = -m^3n^3$

A su vez, aplicando la fórmula:

$\left.\begin{matrix} k = 4 \\ n = 7 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} t_4 = -m^{7-4} \cdot n^{4-1} \\ t_4 = -m^3n^3 \end{matrix}$

Es negativo por ser de lugar par.

Clave D

15. Cualquier término estará expresado por:

$t_k = (x^2)^{20-k}\, y^{k-1} = x^{40-2k}y^{k-1}$

Dato: $40 - 2k + k - 1 = 35$

$k = 4$

Clave D

16. $\dfrac{x^{4n+5} + y^{4n-6}}{x^{n-4} + y^{n-5}}$

Se cumple:

$\dfrac{4n+5}{n-4} = \dfrac{4n-6}{n-5} \Rightarrow n = 7$

Luego:

$\dfrac{x^{4(7)+5} + y^{4(7)-6}}{x^{7-4} + y^{7-5}} = \dfrac{x^{33} + y^{22}}{x^3 + y^2}$

$= x^{30} - x^{27} \cdot y^2 + x^{24} \cdot y^4 - x^{21} \cdot y^6 + \dots + y^{20}$

Clave D

17. $\dfrac{x^m - y^n}{x^5 - y^7} \Rightarrow \dfrac{m}{5} = \dfrac{n}{7} = P$

$m = 5P \wedge n = 7P$ ...(α)

Reemplazamos:

$\dfrac{x^{5P} - y^{7P}}{x^5 - y^7} = \dfrac{(x^5)^P - (y^7)^P}{(x^5) - (y^7)}$

Sea:

$t_{17} = (x^5)^{P-17} \cdot (y^7)^{17-1} = x^{15}y^{112}$

$x^{5(P-17)} \cdot y^{112} = x^{15}y^{112}$

Se observa que:

$5(P - 17) = 15 \Rightarrow P = 20$

De α:

$m = 5 \cdot 20 = 100$

$n = 7 \cdot 20 = 140$

$\Rightarrow n - m = 40$

Clave E

18. $\dfrac{(x^5)^{\frac{m}{5}} - (y^7)^{\frac{n}{7}}}{x^5 - y^7}$

Por propiedad: $\dfrac{m}{5} = \dfrac{n}{7}$ ... (I)

$\Rightarrow (x^5)^{\frac{m}{5} - 17}(y^7)^{16} = x^{m-85}y^{112}$

Por dato: $x^{m-85}y^{112} = x^{115}y^{112}$

$\Rightarrow m - 85 = 115 \Rightarrow m = 200$

En (I): $n = 280$

Se pide: $m + n = 200 + 280$

$\therefore m + n = 480$

Clave A

Resolución de problemas

19. $\dfrac{x^a - y^b}{x^2 - y^3}$

Se cumple:

$\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = n \Rightarrow \begin{matrix} a = 2n \\ b = 3n \end{matrix}$

Reemplazamos:

$\dfrac{x^{2n} - y^{3n}}{x^2 - y^3} = \dfrac{(x^2)^n - (y^3)^n}{x^2 - y^3}$

Sea:

$t_k = (x^2)^{n-k}\,(y^3)^{k-1}$

$\text{grado} = 2(n - k) + 3(k - 1) = 2n + k - 3$

Dato:

Grado = 2(número de términos)

$2n + k - 3 = 2n \Rightarrow k = 3$

Clave B

20. $\dfrac{(x^5)^{31} + (y^3)^{31}}{x^5 + y^3} \Rightarrow t_k = (-1)^{k+1}(x^5)^{31-k}(y^3)^{k-1}$

- $5(31 - k) + 3(k - 1) = 122$

  $k = 15$

- $5(31 - k) - 3(k - 1)$

  $5(31 - 15) - 3(15 - 1) = 38$

Clave C

Nivel 3 (página 29) Unidad 1

Comunicación matemática

21.

22.

Razonamiento y demostración

23. $\dfrac{(x+y)^{18} - (x-y)^{12}}{(x+y)^3 - (x-y)^2} = \dfrac{[(x+y)^3]^6 - [(x-y)^2]^6}{(x+y)^3 - (x-y)^2}$

$t_4 = [(x+y)^3]^{6-4}\,[(x-y)^2]^{4-1}$

$t_4 = (x+y)^6\,(x-y)^6 = (x^2 - y^2)^6$

Para:

$x = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{10}$

$t_4 = \left((2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{10})^2\right)^6 = 2^6 = 64$

Clave D

24. $\dfrac{x^{48}+x^{42}+x^{36}+...+x^6+1}{x^{24}-x^{21}+x^{18}+...-x^3+1} = \dfrac{\dfrac{x^{54}-1}{x^6-1}}{\dfrac{x^{27}+1}{x^3+1}}$

Simplificamos:

$\dfrac{(x^{54}-1)(x^3+1)}{(x^3+1)(x^3-1)(x^{27}+1)}$

$\dfrac{(x^{27}+1)(x^{27}-1)}{(x^{27}+1)(x^3-1)} = \dfrac{x^{27}-1}{x^3-1} = \dfrac{(x^3)^9-1}{x^3-1}$

$t_5 = (x^3)^{9-5} = x^{12}$

Clave B

25. $\dfrac{(x^3)^{15}-(\sqrt[3]{3})^{15}}{x^3-\sqrt[3]{3}}$

Por la fórmula del término general se tiene:

$t_k = (x^3)^{15-k}(\sqrt[3]{3})^{k-1}$ ...(*)

Si el exponente de x es 24, entonces:

$3(15-k) = 24$

$\Rightarrow 15-k = 8 \Rightarrow k = 7$

En (*) el coeficiente será: $(\sqrt[3]{3})^{7-1} = 9$

Clave D

26. Dándole forma:

$\dfrac{1-1+2a-a^2}{1-\sqrt[20]{a-1}} = \dfrac{1-(1-2a+a^2)}{1-\sqrt[20]{a-1}}$

$= \dfrac{1-(a-1)^2}{1-(a-1)^{\frac{1}{20}}} = \dfrac{1^{40}-\left[(a-1)^{\frac{1}{20}}\right]^{40}}{1-(a-1)^{\frac{1}{20}}}$

Luego: $t_{21} = (1)^{40-21}\left[(a-1)^{\frac{1}{20}}\right]^{20}$

$t_{21} = a-1$

Clave B

27. $\dfrac{x^{3n+9}+y^{3n}}{x^3+y^2}$

Se cumple:

$\dfrac{3n+9}{3} = \dfrac{3n}{2} \Rightarrow n = 6$

Reemplazamos:

$\dfrac{x^{27}+y^{18}}{x^3+y^2} = \dfrac{(x^3)^9+(y^2)^9}{(x^3)+(y^2)}$

Término central $= t_{\left(\frac{9+1}{2}\right)} = t_5$

$t_5 = (x^3)^{9-5}\cdot(y^2)^{5-1} = x^{12}\cdot y^8$ (+; k impar)

Si: $x = 1 \wedge y = 2$

$\Rightarrow t_5 = 1^{12}\cdot 2^8 = 256$

Clave A

28. Se cumple:

$\dfrac{5m+10}{2n+9} = \dfrac{5m-50}{2n+5}$

$(m+2)(2n+5) = (m-10)(2n+9)$

$2mn + 5m + 4n + 10 = 2mn + 9m - 20n - 90$

Simplificamos:

m	−	6n	=	25	
↑		↑			
31		1			✓
25		0			×

Reemplazamos:

$\dfrac{5m-50}{2n+5} = \dfrac{5(31)-50}{2(1)+5} = 15$

Clave E

29. $\dfrac{x^{5a-2}-y^{4b+4}}{x^3-y^4}$

Se cumple:

$\dfrac{5a-2}{3} = \dfrac{4b+4}{4} = 6$

En (I):

$\dfrac{5a-2}{3} = 6$

$5a-2 = 18 \Rightarrow a = 4$

$\dfrac{4b+4}{4} = 6 \Rightarrow 4b+4 = 24$

$b = 5$

$\therefore a-b = 4-5 = -1$

Clave E

Resolución de problemas

30. $... -x^{18}\cdot y^{27} + x^{16}\cdot y^{30} - ...$

Se originan de la siguiente división

$\dfrac{(x^2)^n+(y^3)^n}{x^2+y^3} \vee \dfrac{(x^2)^n-(y^3)^n}{x^2+y^3}$

Sea un término: t_k

$t_k = -(x^2)^{n-k}\cdot(y^3)^{k-1} = -x^{18}y^{27}$

Luego:

$3(k-1) = 27 \Rightarrow k = 10$

$2(n-k) = 18$

$n - 10 = 9 \Rightarrow n = 19$

n: impar (2.° caso)

$\dfrac{x^{38}+y^{27}}{x^2+y^3}$

Clave D

31. $\dfrac{(x^2)^{\frac{m}{2}}-(y^3)^{\frac{n}{3}}}{x^2-y^3}$

$\Rightarrow t_7 = (x^2)^{\frac{m}{2}-7}(y^3)^6 = x^{m-14}y^{18}$

Dato: $m - 14 = 18 \Rightarrow m = 32$

Además: $\dfrac{m}{2} = \dfrac{n}{3} \Rightarrow n = 48$

Luego: $m + 2n = 32 + 2(48) = 128$

$\therefore m + 2n = 128$

Clave C

32. $\dfrac{x^{2a+6b}-y^{4a+2b}}{x^5-y^3}$

Se cumple:

$\dfrac{2a+6b}{5} = \dfrac{4a+2b}{3} = n$ ...(I)

$6a + 18b = 20a + 10b$

$8b = 14a$

$4b = 7a \Rightarrow b = \dfrac{7}{4}a$ ...(II)

El término noveno:

$t_9 = (x^5)^{n-9}\cdot(y^3)^{9-1} = x^{55}\cdot y^{24}$

Hallamos el número de términos n:

$5n - 45 = 55$

$5n = 100$

$n = 20$

En (I):

$\dfrac{2a+6b}{5} = 20$

$\dfrac{2a+6\left(\frac{7a}{4}\right)}{5} = 20 \Rightarrow \dfrac{4a+21a}{10} = 20$

$25a = (10)(20)$

$a = 8$

En (II):

$b = \dfrac{7}{4}a \Rightarrow b = \dfrac{7}{4}(8) = 14$

$\therefore a + b = 22$

Clave B

33. $\dfrac{x^a-y^b}{x^2-y^2}$

Se cumple:

$\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{2} = n \Rightarrow a = b = 2n$ ...(I)

Hallamos el término k:

$t_k = (x^2)^{n-k}\cdot y^{k-1}$

Por dato:

$x^{2n-2k}\cdot y^{k-1} = x^6\cdot y^4$

$\Rightarrow k - 1 = 4$

$k = 5$

También: $2n - 2k = 6$

$n = 8$ en (I)

$\Rightarrow a = 16 \wedge b = 16$

$\therefore 2a - b = 2(16) - 16 = 16$

Clave D

34. Del dato:

$t_{10} = -(x^p)^{m-10}\cdot b^9$

$\Rightarrow p(m-10) = 20$ ...(1)

Del dato el t_{11} posee GA = 15

$\Rightarrow t_{11} = (x^p)^{m-11}\cdot b^{10}$

$p(m-11) = 15$ ...(2)

(1) ÷ (2):

$\dfrac{m-10}{m-11} = \dfrac{20}{15} \Rightarrow m = 14$

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 31)

1. En $\underbrace{\frac{a}{b^6}+\frac{b^6}{9}+2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} = 7+2$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{\frac{a}{b^6}}+\sqrt{\frac{b^6}{a}}\right)^2}_{3} = 9$$

$$\sqrt{\frac{a}{b^6}}+\sqrt{\frac{b^6}{a}} = 3$$

$$\sqrt{\frac{a}{b^6}}+\sqrt{\frac{b^6}{a}}+2 = 3+2$$

$$\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b^6}}+\sqrt[4]{\frac{b^6}{a}}\right)^2 = 5$$

$$\sqrt[4]{\frac{9}{b^6}}+\sqrt[4]{\frac{b^6}{a}} = \sqrt{5}$$

Clave C

2. Resolvemos:

$$\frac{\sqrt[3]{a^4 . a^{\frac{1}{2}}}}{a^{-\frac{3}{2}}} = a^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{-\frac{3}{2}}} = a^{\sqrt{x}} \Rightarrow a^3 = a^{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 3$$

$$x = 9$$

Clave D

3. Dividimos por Horner:

4	4	2	–4	–a	b	c
–2		–2	0	1		
0			0	0	0	
1				2	0	–1
	1	0	–1	0	1	5

$\Rightarrow\ 3 - a = 0 \qquad c - 1 = 5$

$a = 3 \qquad c = 6$

$b + 0 = 1$

$b = 1$

$\therefore\ a + b + c = 3 + 1 + 6 = 10$

Clave C

4. Por el teorema del resto igualamos el denominador a cero:

$x - 2 = 0$

$\Rightarrow\ x = 2$

Evaluamos:

$R(x) = 2(2^2 - 6)^4 + (7 . 2 - 6)^3 + 3$

$= 2(-2)^4 + 8^3 + 3$

$\therefore R(x) = 547$

Clave E

5. Para que sea cociente notable:

$\frac{m+2}{1} = \frac{3m}{2} \Rightarrow 2m + 4 = 3m$

$m = 4$

Clave A

6. Factorizamos en el numerador: x^2

$\Rightarrow\ x^{14} + x^{12} + x^{10} + ... x^2 + 1$ proviene de:

$$\frac{x^{16}-1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow\ x^2\frac{(x^{16}-1)}{(x^2-1)(x^2+1)(x^8+1)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^2(x^8-1)(x^8+1)}{(x^4-1)(x^8+1)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^2(x^4-1)(x^4+1)}{x^4-1} = x^6 + x^2$$

Clave B

7. Factorizamos ambos polinomios:

$P(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

$Q(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

Se observa que el MCD de ambos es $(x - 1)$.

Clave C

8. Formamos el polinomio P(x) de raíces (1; 5; 2)

$P(x) = k(x - 1)(x - 5)(x - 2)$

Dato: $P(6) = 10 = k(6 - 1)(6 - 5)(6 - 2)$

$\Rightarrow\ k = 1/2$

$P(x) = 1/2(x - 1)(x - 5)(x - 2)$

$\Rightarrow\ P(-1) = -18$

Clave A

9. Como el MCD es factor de P(x) y Q(x), entonces: $x - 2$ es factor; $x = 2$ es raíz, usamos Ruffini:

P(x):

	1	–5	M
2		2	–6
	1	–3	0

Por ser división exacta:

$M - 6 = 0$

$M = 6$

Q(x):

	1	N	–8
2		2	2N + 4
	1	N + 2	0

$\Rightarrow\ 2N + 4 - 8 = 0$

$N = 2$

Clave B

10. Como se trata de un cociente notable $\frac{x^n - a^n}{x - a}$, entonces:

$t_k = x^{n-k}a^{k-1}$

Dándole forma: $\frac{(x^5)^{20} - (y^7)^{20}}{x^5 - y^7} \Rightarrow n = 20$

Luego:

$t_{11} = (x^5)^{20-11}(y^7)^{11-1} = (x^5)^9(y^7)^{10} = x^{45}y^{70}$

Clave D

11. $E = \left.\sqrt[3]{\frac{16}{\sqrt[3]{\frac{16}{\vdots}}}}\right\}E \quad \Rightarrow\ E = \sqrt[3]{\frac{16}{E}}$

$E^3 = \frac{16}{E}$

$E^4 = 16$

$E = 2$

Clave B

Unidad 2

FACTORIZACIÓN

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 36) Unidad 2

Comunicación matemática

1. (II) $P(m; n) = Am^{2p} + Bm^{p}n^{q} + Cn^{2q}$

(I) $P(m; n) = Am^{2p} + Bm^{p}n^{q} + Cn^{2q} + Dm^{p} + En^{q} + F$

(III) $P(m) = Am^{4p}n^{4q} + Bm^{3p}n^{3q} + Cm^{2p}n^{2q} + Dm^{p}n^{q} + E$

2. I. Circunferencia
II. Aspa doble especial
III. Factor común

Razonamiento y demostración

3. $R(a; x) = \underline{ap} + \underline{ax} - \underline{\underline{2bx}} - \underline{\underline{2bp}}$

Factorizamos:

$R(a; x) = p(a - 2b) + (a - 2b)x$
$= (a - 2b)(p + x)$

$\therefore$ Σcoef. de un factor primo: $1 - 2b$

Clave D

4. $F(a) = a^4 + a^3 - a^2 - a$

Agrupamos:

$F(a) = a^2(a^2 - 1) + a(a^2 - 1)$
$= (a^2 - 1)(a^2 + a)$
$= a(a + 1)^2(a - 1)$

$\therefore$ El factor primo con mayor término independiente es: $a + 1$

Clave C

5. $P(a; p) = a^4p^2 + 6a^2p + 9$
$= (a^2p)^2 + 2 \cdot 3\,(a^2p) + 3^2$
$= (a^2p + 3)^2$

Clave D

6. $H(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 3)(x^2 + 2x - 3)$

x ╳ 3
x ╳ –1

$H(x) = (x^2 + 1)(x - 1)^2(x + 3)^2$

Número de factores primos: 3

Clave B

7. Ordenando tenemos:

$a^2 + 2a + 1 + ab + b$

Sabemos:

$a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$

Entonces:

$(a + 1)^2 + b(a + 1) = (a + 1)(a + 1 + b)$

Clave E

8. $F(x; y) = x^3 - (y^3 + 3y^2 + 3y + 1)$
$= x^3 - (y + 1)^3$
$= (x - y - 1)(x^2 + x(y + 1) + (y + 1)^2)$

Clave E

Resolución de problemas

9. $7x^3 - 10x^2 + x + 2$
$7x^3 - 7x^2 - 3x^2 + x + 2$
$7x^2(x - 1) - (3x^2 - x - 2)$
$7x^2(x - 1) - (3x + 2)(x - 1)$
$(x - 1)(7x^2 - 3x - 2)$

$\therefore$ Un coeficiente principal es 7.

Clave D

10. $P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 1) + x(3 - x)(x + 2)$
$= (x - 3)(x^2 + 3x + 1 - x^2 - 2x)$
$= (x - 3)(x + 1)$

Términos independientes: – 3 y 1

Clave B

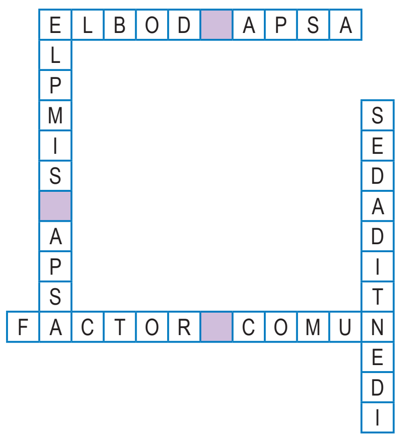
Nivel 2 (página 36) Unidad 2

Comunicación matemática

11. I. Número de factores primos = 4 ...(F)
II. Los términos independientes de los factores primos son: –2; 3 ...(F)
III. Las Σcoef. de los factores primos son: –1; 4 ...(V)

Clave D

12.



13. 1.ra alternativa

$A(x) = x^2 + px + 8$

x ╳ 8   8x
x ╳ 1   x
9x $\Rightarrow$ p = 9

$B(x) = x^2 + qx + 2$

x ╳ 2   2x
x ╳ 1   x
3x $\Rightarrow$ q = 3

Factor común: $x + 1 = x + r \Rightarrow r = 1$

$pr^2 + qr^{-2} = 9(1)^2 + 3(1)^{-2} = 12$

2.ª alternativa:

$A(x) = x^2 + px + 8$

x ╳ 2   2x
x ╳ 4   4x
6x $\Rightarrow$ p = 6

$B(x) = x^2 + qx + 2$

x ╳ 2   2x
x ╳ 1   x
3x $\Rightarrow$ q = 3

Factor común: $x + 2 = x + r \Rightarrow r = 2$

$pr^2 + qr^{-2} = 6(2)^2 + 3(2)^{-2} = \frac{99}{4}$

Clave B

Razonamiento y demostración

14. $P(x; y) = 5x^2 + 16xy + 3y^2 + 11x + 5y + 2$

5x ╳ y ╳ 1
x ╳ 3y ╳ 2

$\Rightarrow P(x; y) = (5x + y + 1)\underbrace{(x + 3y + 2)}_{\text{factor primo}}$

Clave B

15. $M(x; y) = 12(x - y)^2 + 7(x - y) - 12$

4(x – y) ╳ –3
3(x – y) ╳ +4

$M(x; y) = (4(x - y) - 3)(3(x - y) + 4)$
$M(x; y) = (4x - 4y - 3)(3x - 3y + 4)$

$\therefore$ 2 factores primos.

Clave B

16. $M(x; y) = x^3 + x^2y - y^2x - y^3$

Agrupando:

$M(x; y) = x^2(x + y) - y^2(x + y)$
$= (x + y)(x^2 - y^2)$
$= (x + y)(x - y)(x + y)$

$\therefore$ $M(x; y) = (x + y)^2(x - y)$

Clave B

17. $F(x; y) = xm - xp + xn + my - py + ny$
$F(x; y) = x(m - p + n) + y(m - p + n)$
$F(x; y) = (m - p + n)(x + y)$

Un factor es: $m - p + n$

Clave B

18. $H(x) = (x^2 - 3)(x + 5)(x^4 - 2x^2 - 8)$

x^2 ╳ –4
x^2 ╳ 2

$H(x) = (x^2 - 3)(x + 5)(x^2 - 4)(x^2 + 2)$
$H(x) = (\underline{x^2 - 3})(x + 5)(x + 2)(x - 2)(\underline{x^2 + 2})$

$\therefore$ Número de factores primos cuadráticos: 2

Clave A

19. $R(a; b) = a^9b^3 + 2a^8b^3 + a^7b^3 + 2a^6b^3$
$= a^6b^3[a^3 + 2a^2 + a + 2]$
$= a^6b^3[a^2(a + 2) + (a + 2)]$
$= a^6b^3\,(a + 2)(a^2 + 1)$

Factores primos lineales: a; b; a + 2

$\therefore$ Número de factores primos lineales: 3

Clave E

Resolución de problemas

20. $E = 3x^4 - 2y^2 - x^2y + 7yz - 7x^2z$

$= 3x^4 - x^2y - 2y^2 + 7yz - 7x^2z$

$$\begin{array}{ccc} 3x^2 & \times & +2y \\ x^2 & & -1y \end{array}$$

$= (3x^2 + 2y)(x^2 - y) - 7z(x^2 - y)$

$= (x^2 - y)[3x^2 + 2y - 7z]$

$\therefore$ Un factor primo es: $x^2 - y$

Clave D

21. $R(x; y) = y^2 - x^2 + 6x - 9$

Completamos el polinomio con 0xy

$R(x; y) = y^2 + 0xy - x^2 + 6x - 9$

$$\begin{array}{ccccc} y & \times & -x & \times & +3 \\ y & & x & & -3 \end{array}$$

$R(x; y) = \underbrace{(y - x + 3)}_{3}\underbrace{(y + x - 3)}_{-1}$

Σcoef: 3 −1

$\therefore y - x + 3$

Clave A

Nivel 3 (página 37) Unidad 2

Comunicación matemática

22. Correcta (III)

23.
- $(2a)(a)x^6 = 18x^6 \Rightarrow a = 3$
- $(d)(1) = -(2d + 15) \Rightarrow d = -5$
- $2ax^3 + adx^3 = bx^3 \Rightarrow b = -9$

$\Rightarrow 18x^6 + bx^3 - (2d + 15) = (3x^3 + 1)\underbrace{(6x^3 - 5)}$

Clave C

24. $Q(a; b; x) = (a + y)(b + z)(c - x)(x - y)(z - y)$

El polinomio tiene 4 factores primos mónicos.

El polinomio tiene 4 factores primos.

El polinomio tiene 3 variables.

$\therefore$ FVF

Clave D

25. $R(x; y; z) = x^3(y - 3)(z + 5)(x^2 - x + 1)(y + z)$

n.° factores primos: 5

n.° factores primos monomios: 1

n.° factores primos binomios: 3

n.° factores primos trinomios: 1

n.° factores cuadráticos: 1

Clave C

Razonamiento y demostración

26. $P(a; b; c) =$

$(a + b)^2 + (a + b)(c + 4) - (2c + 1)(c - 3)$

$$\begin{array}{ccc} (a + b) & \times & +(2c + 1) \\ (a + b) & & -(c - 3) \end{array}$$

$= (a + b + 2c + 1)(a + b - c + 3)$

Clave E

27. $P(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6$

$$\begin{array}{cccccl} x^2 & \times & 2x & \times & 3 & = 3x^2 \\ x^2 & & x & & 2 & = \underline{2x^2} \\ & & & & & 5x^2 \end{array}$$

Falta: $2x^2 = (2x)(x)$

$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 2x + 3)\underbrace{(x^2 + x + 2)}_{\text{factor primo}}$

Clave C

28. $R(x) = x^{18} + x^{17} + x^{16} - x^3 + 1$

$= x^{16}(x^2 + x + 1) - (x^3 - 1)$

$= x^{16}(x^2 + x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^{16} - x + 1)$

$\therefore$ Número de factores primos: 2

Clave B

29. $F(x) = x^3 - 1 - 2x(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 + x + 1) - 2x(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 2x)$

$= (x - 1)(x^2 - x + 1)$

Clave B

30. $P(x) = x^4 - 2^4 = (x^2 + 2^2)(x^2 - 2^2)$

$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

$Q(x) = x^2 - x - 6$

$$\begin{array}{ccc} x & \times & -3 \\ x & & 2 \end{array}$$

$Q(x) = (x - 3)(x + 2)$

El factor común de P y Q es: $x + 2$

Luego:

$ax + b = x + 2$

$a = 1 \wedge b = 2$

Nos piden: $ab = 2$

Clave B

31. $P(x) = x^2 - (2x - 1)^2 - 6x + 9$

$= x^2 - 4x^2 + 4x - 1 - 6x + 9$

$= -3x^2 - 2x + 8$

$$\begin{array}{ccc} -3x & \times & 4 \\ x & & 2 \end{array}$$

$= (-3x + 4)(x + 2)$

$= -(3x - 4)(x + 2)$

$\therefore$ Un factor primo es: $3x - 4$

Clave A

Resolución de problemas

32. $A(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \times & -3 \\ x^2 & & 1 \end{array}$$

$A(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$

Menor suma de coeficientes de un factor primo es: −2.

Luego el factor es: $x^2 - 3$

Clave A

33. $P(m; n; p) = m^2 - 4p^2 + 4mn + 4n^2$

Agrupando:

$P(m; n; p) = (m + 2n)^2 - (2p)^2$

$= (m + 2n + 2p)(m + 2n - 2p)$

$\therefore$ Suma de factores primos: $2m + 4n$

Clave A

PRACTIQUEMOS

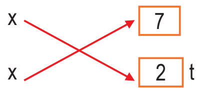
Nivel 1 (página 40) Unidad 2

Comunicación matemática

1.

- Factorizamos cada uno de los polinomios:

$H(x) = x^2 + (7 + 2t)x + 14t$



$H(x) = (x + \boxed{7}\,)(x + \boxed{2}\,t)$

$I(x) = x^2 + 14x + 49$

$I(x) = (x + \boxed{7}\,)^2$

- El MCM y el MCD de los polinomios factorizados respectivamente será:

$MCM(H; I) = (x + \boxed{7}\,)^2(x + \boxed{2}\,t)$

$MCD(H; I) = x + \boxed{7}$

- Del enunciado:

Σ factores primos $MCM(H; I) = 2MCD(H; I)$

$(x + \boxed{7}\,) + (x + \boxed{2}\,t) = 2(x + \boxed{7}\,)$

$2x + \boxed{7} + \boxed{2}\,t = 2x + 2\boxed{7}$

$$t = \frac{2\boxed{7} - \boxed{7}}{\boxed{2}}$$

$\therefore\ t = \boxed{3{,}5}$

2.

Razonamiento y demostración

3. Sabemos:

$MCM(P(x); Q(x))MCD(P(x); Q(x)) = P(x) \,.\, Q(x)$

$G(MCM(P(x); Q(x))) + 2 = G(P(x)) + G(Q(x))$

$G(MCM(P(x); Q(x))) + 2 = 5 + 7$

$\therefore\ G(MCM(P(x); Q(x))) = 10$

Clave E

4. $E = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a - \sqrt{a^2 - 1}} - \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$

$$E = \frac{(a + \sqrt{a^2 - 1})^2 - (a - \sqrt{a^2 - 1})^2}{a^2 - (\sqrt{a^2 - 1})^2}$$

$$E = \frac{[(a + \sqrt{a^2 - 1}) + (a - \sqrt{a^2 - 1})][(a + \sqrt{a^2 - 1}) - (a - \sqrt{a^2 - 1})]}{a^2 - (a^2 - 1)}$$

$$E = \frac{2a \,.\, 2\sqrt{a^2 - 1}}{1}$$

$\therefore\ E = 4a(a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

Clave D

5. $N = \dfrac{(x - a)(x^2 + xa + a^2)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

$$N = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})(x^2 + xa + a^2)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

$N = (\sqrt{x} + \sqrt{a})(x^2 + x \,.\, a + a^2)$ ...(1)

Reemplazamos $x = a$ en (1):

$\Rightarrow N = (\sqrt{a} + \sqrt{a})(a^2 + a \,.\, a + a^2)$

$\therefore\ N = 2\sqrt{a}\ .\ 3a^2 = 6a^2\sqrt{a}$

Clave B

6. Del enunciado se puede deducir:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k^2$

Del enunciado:

$$bde = \frac{R^2}{k^2}$$

$$\left(\frac{a}{k^2}\right)\left(\frac{c}{k^2}\right)fk^2 = \frac{R^2}{k^2}$$

$\Rightarrow acf = R^2$

$\therefore\ \sqrt{acf} = R$

Clave E

7. $\dfrac{x - 1}{1 - \dfrac{x}{x + 1}} \div \dfrac{x + 1}{2 - \dfrac{x}{x - 1}}$

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1 - x} \div \frac{(x + 1)(x - 1)}{2x - 2 - x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1}{1} \div \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{\dfrac{x^2 - 1}{1}}{\dfrac{x^2 - 1}{x - 2}} = x - 2$$

Clave C

8. $N = \dfrac{(x - a)^2 + (x + a)^2 + 2(a^2 + x^2)}{(x + a)^2 - (x - a)^2}$

$$N = \frac{2(x^2 + a^2) + 2(a^2 + x^2)}{4xa}$$

$$N = \frac{4(a^2 + x^2)}{4xa} = \frac{a^2 + x^2}{xa}$$

$$N = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}$$

$$N = \frac{2(\sqrt{3}^2 + 1^2)}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{2(4)}{2}$$

$\therefore\ N = 4$

Clave D

9. Se observa:

$A = a + \frac{1}{B}$

$\Rightarrow\ AB = aB + 1$ ...(1)

Además:

$B = b + \frac{1}{A}$

$\Rightarrow\ AB = bA + 1$ ...(2)

Igualamos (1) y (2):

$bA + 1 = aB + 1$

$\therefore\ \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$

Clave A

10. $H = \dfrac{a^2}{b(b+a)} + \dfrac{b^2}{a(a+b)} - \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)$

$H = \dfrac{1^2}{a+b}\left[\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}\right] - \left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)$

$H = \dfrac{(a^3+b^3)}{(a+b)ab} - \left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)$

$H = \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)ab} - \left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)$

$H = \dfrac{(a^2-ab+b^2)-(a^2+b^2)}{ab} = -\dfrac{ab}{ab}$

$\therefore H = -1$

Clave E

11. $M = \dfrac{1}{x^2+2x-3} - \dfrac{1}{3x^2-2x-1} - \dfrac{2}{3x^2+10x+3}$

$M = \dfrac{1}{(x+3)(x-1)} - \dfrac{1}{(3x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(3x+1)(x+3)}$

$M = \dfrac{3x+1-(x+3)-2(x-1)}{(x+3)(x-1)(3x+1)}$

$M = \dfrac{3x+1-x-3-2x+2}{(x+3)(x-1)(3x+1)} =$

$\Rightarrow M = \dfrac{0}{(x+3)(x-1)(3x+1)}$

$\therefore M = 0$

Clave C

Resolución de problemas

12. Sean las expresiones:
$A(x); B(x)$

Por condición:
$A \,.\, B = (x+1)^2(x+2)(x+5)$

Por propiedad:
$[MCM(A;B)] \cdot \underbrace{[MCD(A;B)]}_{x+2} =$

$(x+1)^2(x+2)(x+5)$

Luego:
$MCM(A; B) = (x+1)^2(x+5)$
$= (x^2+2x+1)(x+5)$

Efectuamos:
$MCM(A; B) = x^3 + 2x^2 + x + 5x^2 + 10x + 5$
$\therefore MCM(A; B) = x^3 + 7x^2 + 11x + 5$

Clave C

13. Si F(x; y) es independiente de x e y, entonces:

$F(x; y) = k$: cte

$\dfrac{mx^2 + 18xy + 24y^2}{5x^2 + 3xy + ny^2} = k$

Si $x = 1 \wedge y = 0 \Rightarrow \dfrac{m}{5} = k$ ...(I)

Si $x = 0 \wedge y = 1 \Rightarrow \dfrac{24}{n} = k$ ...(II)

Si $x = y = 1 \Rightarrow \dfrac{m+42}{8+n} = k$ ...(III)

De (I) y (II): $n \,.\, m = 120$
De (II) y (III):
$n = 4 \Rightarrow m = 30$
$\therefore n + m = 34$

Clave C

14. $F(x; y) = k$: cte

Si: $x = 0 \wedge y = 1 \Rightarrow \dfrac{24}{8} = k \Rightarrow k = 3$

Si: $x = 1 \wedge y = 0 \Rightarrow \dfrac{a}{5} = k \Rightarrow a = 15$

Si: $x = 1 \wedge y = 1 \Rightarrow \dfrac{a+b+24}{15} = 3$

$15 + b + 24 = 45 \quad \Rightarrow b = 6$

$\therefore a \,.\, b = 90$

Clave D

Nivel 2 (página 41) Unidad 2

Comunicación matemática

15. FVF

Clave B

16. A) $R = \dfrac{7}{t-2a}$ (V)

B) $S = \dfrac{3m+2}{2m+1}$ (F)

C) $T = 0,3$ (V)

Razonamiento y demostración

17. $\left(\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x-5}{x+4}\right)(x^2+3x-4)$

$= \left[\dfrac{(x+2)(x+4)-(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+4)}\right](x^2+3x-4)$

$= \left[\dfrac{x^2+6x+8-x^2+6x-5}{(x-1)(x+4)}\right](x+4)(x-1)$

$= 12x + 3$

Clave A

18. $\dfrac{(mx+ny)^2 + (nx-my)^2}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{(mx)^2+(ny)^2+2mnxy+(nx)^2+(my)^2-2mnxy}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{m^2(x^2+y^2)+n^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

$= \dfrac{(x^2+y^2)(m^2+n^2)}{x^2+y^2} = m^2 + n^2$

Clave D

19. $\dfrac{x^5 - 25x^3 + x^2 - 25}{x^5 - 16x^3 + x^2 - 16}$

$\dfrac{x^3(x^2-25)+(x^2-25)}{x^3(x^2-16)+(x^2-16)} = \dfrac{(x^2-25)(x^3+1)}{(x^2-16)(x^3+1)}$

$= \dfrac{(x+5)(x-5)}{(x+4)(x-4)}$

$\therefore$ Un factor del numerador es: $x + 5$

Clave A

20. $\dfrac{x^3+1}{x-1-\dfrac{x-2}{x+1}} = \dfrac{x^3+1}{\dfrac{x^2-1-x+2}{x+1}}$

$= \dfrac{(x+1)^2(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = (x+1)^2$

Clave D

21. $\left[\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right]\left[\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{4} - x\right]$

Homogenizamos:

$= \left[\dfrac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}\right]\left[\dfrac{3+x^2-4x^2}{4x}\right]$

$= \dfrac{4x}{(1-x^2)} \cdot \dfrac{(3-3x^2)}{4x}$

$= \dfrac{3(1-x^2)}{(1-x^2)} = 3$

Clave C

22. $(x-3)$ divide exactamente a P(x) y Q(x)

$\Rightarrow \dfrac{x^2-5x+a}{x-3} \quad \wedge \quad \dfrac{x^2-4x+b}{x-3}$

tienen residuo cero.

1	1	–5	a
3		3	–6
	1	–2	0

$\Rightarrow a = 6$

1	1	–4	b
3		3	–3
	1	–1	0

$\Rightarrow b = 3$
$\therefore ab = 18$

Clave E

23. Común denominador en P:

$P = \dfrac{(a-b)xy + b(x-a)(y-a) - a(x-b)(y-b)}{ab(a-b)}$

$P = \dfrac{axy-bxy+bxy-abx-aby+a^2b-axy+abx+aby-ab^2}{ab(a-b)}$

$P = \dfrac{a^2b-ab^2}{ab(a-b)}$

$P = \dfrac{ab(a-b)}{ab(a-b)}$

$\therefore P = 1$

Clave B

24. Sea:
$y + z = a; x + z = b \wedge x + y = c$
Del enunciado:
$\Rightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$

Luego:

$ab + bc + ca = 0$

$$E = \left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{a+c}{b}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right) \qquad ...(1)$$

Sabemos:

$$(a+b+c)\underbrace{(ab+bc+ac)}_{0} = (a+b)(a+c)(b+c) + abc$$

$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = -abc \qquad ...(2)$

Reemplazamos (2) en (1):

$\therefore E = -1$

Clave D

Resolución de problemas

25. Sabemos:

$MCD(P; Q)\ MCM(P; Q) = P\ .\ Q$

$\Rightarrow \quad G(MCD(P; Q) + G(MCM(P; Q)) = G(P) + G(Q)$

$2 + G(MCM(P; Q)) = 4 + 4$

$\therefore\ G(MCM(P;Q)) = 6$

Clave D

26. Sean los polinomios de x: A y B

Por propiedad:

$MCD(A; B)\ MCM(A; B) = AB \qquad (1)$

Según el enunciado:

$AB = (9x^2 - 1)^2 = (3x + 1)^2(3x - 1)^2 \qquad (2)$

(2) = (1):

$MCD(A; B)\ MCM(A; B) = (3x + 1)^2(3x - 1)^2 \qquad (3)$

También:

$$\frac{MCD(A;B)}{MCM(A;B)} = (3x-1)^2 \qquad (4)$$

Dividimos (3) y (4) miembro a miembro.

$(MCM(A; B))^2 = (3x + 1)^2$

$\therefore\ MCM(A; B) = \pm(3x + 1)$

Clave A

Nivel 3 (página 42) Unidad 2

Comunicación matemática

27. VFF

Clave A

28.

Expresión	Relaciona con
$\dfrac{a^2-b^2}{(ax+by)^2-(ay+bx)^2}$	$\dfrac{1}{x^2-y^2}$
$\dfrac{27x^3-9x^2y+3xy^2-\frac{y^3}{27}}{\left(3x-\frac{y}{3}\right)^2}$	$3x - \dfrac{y}{3}$
$1-\dfrac{1}{x+\dfrac{x-1}{x^2-\dfrac{x^3-1}{x-\frac{1}{x}}}}$	$1 - x$
$\dfrac{x+\frac{2x-1}{x-2}}{x-\frac{5x-3}{x+1}}$	$\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)(x-3)}$

Razonamiento y demostración

29. Del enunciado, se cumple:

$$\frac{P(x)}{(x-1)(x+3)} \quad y \quad \frac{Q(x)}{\underbrace{(x-1)(x+3)}_{x^2+2x-3}}$$

Tiene R(x) = 0

Por Horner:

1	1	4	a	b
–2		–2	3	
3			–4	6
	1	2	0	0

$\Rightarrow P(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)$

Por Horner:

1	1	0	c	d
–2		–2	3	
3			4	–6
	1	–2	0	0

Luego:

$Q(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$

$\Rightarrow A = MCM(P; Q) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)(x - 2)$

$\therefore\ \Sigma$coeficientes de

$A = (1 - 1)(1 + 3)\ (1 + 2)(1 - 2) = 0$

Clave E

30. Dato:

$(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ac)$

Desarrollando obtenemos:

$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$

Por propiedad se cumple:

$a = b = c = k$

Nos piden:

$$A = \frac{(a+b)^{10}}{a^6b^4} + \frac{(a+c)^{10}}{b^7a^3} + \frac{(b+c)^{10}}{b^7c^3}$$

Reemplazamos:

$$A = \frac{(2k)^{10}}{k^{10}} + \frac{(2k)^{10}}{k^{10}} + \frac{(2k)^{10}}{k^{10}}$$

$A = 2^{10} + 2^{10} + 2^{10} = 3\ .\ 2^{10} = 3\ .\ 1024$

$\therefore\ \ A = 3072$

Clave E

31.

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + \frac{2(x^3-x)}{x^4+x^3-x-1}$$

$$= \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + \frac{2x(x^2-1)}{x^3(x+1)-(x+1)}$$

$$= \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + \frac{2x(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^3-1)}$$

$$= \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{x^2-x+1+2x}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} = 1$$

Clave D

32.

$$f(x) = \frac{x^3-ax^2+19x-a-4}{x^3-(a+1)x^2+23x-a-7}$$

El numerador y el denominador son factorizables.

PCR del numerador = ± {1; 2; 4}

PCR del denominador = {1; 7}

El común es 1.

Luego por Ruffini:

	1	–a	19	–(a + 4)
1	↓	1	1 – a	20 – a
	1	1 – a	20 – a	0

$-a - 4 + 20 - a = 0$

$16 = 2a \Rightarrow a = 8$

Clave C

33. Dato:

$ax + by + cz + abcxyz = 0$

Nos piden:

$$M = \frac{(1+ax)(1+by)(1+cz)}{-(1-ax)(1-by)(1-cz)}$$

Multiplicando:

$$M = -\left\{\frac{1+\overline{ax+by+cz}+abxy+bcyz+acxz+\overline{abcxyz}}{1-\overline{(ax+by+cz)}+abxy+bcyz+acxz-\overline{abcxyz}}\right\}$$

$$\therefore M = -\left\{\frac{1+abxy+bcyz+acxz}{1+abxy+bcyz+acxz}\right\} = -1$$

Clave C

34. De la expresión:

$$E = \frac{1+x}{x^2-4} - \frac{4}{2x+1} + \frac{2x}{2x^2+5x+2}$$

$$E = \frac{1+x}{(x+2)(x-2)} - \frac{4}{2x+1} + \frac{2x}{(2x+1)(x+2)}$$

$$E = \frac{(1+x)(2x+1)-4(x^2-4)+2x(x-2)}{(x+2)(x-2)(2x+1)}$$

Desarrollamos:

$$E = \frac{17-x}{(x+2)(x-2)(2x+1)}$$

Igualamos el numerador a cero:

$17 - x = 0 \Rightarrow x = 17$

$\therefore$ En x = 17 la expresión se anula.

Clave B

35. Dato:

$ab + ac + bc = 0$

$ab + ac = -bc$

$a(b + c) = -bc \qquad ...(I)$

Nos piden:

$$S = \frac{a^2x+b+c}{a^3x-bc}$$

$$S = \frac{a(a^2x+b+c)}{a(a^3x-bc)} = \frac{a^3x+a(b+c)}{a(a^3x-bc)}$$

Reemplazamos (I) en S:

$$S = a^{-1}\frac{(a^3x-bc)}{a^3x-bc} = a^{-1}$$

Clave D

36. $E = \dfrac{(a+b)^2 - c^2}{a^2 + ab - ac} \cdot \dfrac{a}{(a+c)^2 - b^2} \cdot \dfrac{(a-b)^2 - c^2}{ab - b^2 - bc}$

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$$E = \frac{(a+b+c)(a+b-c)a(a-b+c)(a-b-c)}{a(a+b-c)(a+c+b)(a+c-b)b(a-b-c)}$$

$\therefore\ E = \dfrac{1}{b}$

Clave E

Resolución de problemas

37. Asumimos: $T(x;y;z) \langle\rangle T$ y

$W(x;y;z) \langle\rangle W$

Como los polinomios en x; y; z; por propiedad

$MCD(T;W) . MCM(T;W) = TW$ (1)

Por dato del problema:

$TW = 3x^8yz + x^6 + x^9y + x^5y + x^8z^2 + x^5z + x^9z + x + x^7y^2z + y + x^8y^2 + z + x^7yz^2$

$TW = x^7(3xyz + x^2y + xz^2 + x^2z + zy^2 + xy^2 + yz^2) + x^5(x+y+z) + (x+y+z)$

$TW = x^7(xy)(z+x+y) + yz(x+y+z) + xz(y+z+x)) + x^5(x+y+z) + (x+y+z)$

$TW = (x+y+z)(x^7(xy+yz+xz) + x^5 + 1)$

$TW = (x+y+z)(x^8y + x^7yz + x^8z + x^5 + 1)$...(2)

Según dato del problema y reemplazando (2) en (1):

$MCD(T;W)\cancel{(x+y+z)} = \cancel{(x+y+z)}(x^8y + x^7yz + x^8z + x^5 + 1)$

$\therefore\ MCD(T;W) = x^8y + x^7yz + x^8z + x^5 + 1$

Clave D

38. Para que no dependa de las variables x; y; z se debe cumplir la siguiente propiedad:

$$\underbrace{\frac{t^t+1}{1}}_{I} = \underbrace{\frac{251t^t+1022}{t^t-2}}_{II} = \underbrace{\frac{t+253}{t-3}}_{III}$$

De I y II: $t^{2t} - 252t - 1024 = 0$

$t^t \quad -257$

$t^t \quad +4$

Donde: $t^t = 4^4 \Rightarrow t = 4$

$t^t = 2^2 \Rightarrow t = 2$

El único valor que cumple es 4.

Clave A

39. Sabemos:

MCM(A(x); B(x)) . MCD(A(x); B(x)) = A(x) . B(x)

(MCM(A(x); B(x))) + G(MCD(A(x); B(x))= G(A(x)) + G(B(x))

(MCM(A(x); B(x))) + 6 = 7 + 9

$\therefore$ (MCM(A(x); B(x))) = 10

Clave B

40. $\dfrac{4x+9}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+3}$

$\dfrac{4x+9}{\frac{x^2+5x+6}{2}} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+3}$

$\dfrac{8x+18}{x^2+5x+6} = \dfrac{A(x+3)+B(x+2)}{x^2+5x+6}$

$8x + 18 = Ax + 3A + Bx + 2B$

$8x + 18 = (A+B)x + 3A + 2B$

$\Rightarrow\ A + B = 8$ ... (I)

$3A + 2B = 18$ ...(II)

Luego (I) – 2(I):

$3A + 2B - 2B - 2A = 18 - 16$

$A = 2$

$\Rightarrow B = 6$

$\therefore A + B = 8$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 46) Unidad 2

Comunicación matemática

1. Del teorema:

$$C_n^m = C_p^m \begin{cases} n = p \\ \vee \\ n + p = m \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x + 4 = 7 \ \vee \ (x + 4) + 7 = 16$

$x = 3 \ \vee \qquad x = 5$

Clave C

2.
- Por convención: $0! = 1$ (F)
- Por convención: $0! = 1$; Por definición: $1! = 1$ $\Big\}$ $a = 0 \vee a = 1$ (V)
- De: $0! = 1$, $1! = 1$

No se puede proceder: $0! = 1!$ (F)

$\Rightarrow \ 0 = 1$ (absurdo)

Clave D

Razonamiento y demostración

3. $C_{x^2}^{20} = C_x^{20}$

Se cumple:

$x^2 = x \Rightarrow x = 1 \ \vee \ x = 0$

ó

$x^2 + x = 20 \Rightarrow x(x + 1) = 20 = 4 \, . \, (4 + 1)$

$\Rightarrow x = 4$

$\therefore$ Tiene 3 soluciones.

Clave A

4. El término central es: t_5

Luego:

$$t_5 = C_4^9\left(\frac{x}{2}\right)^{9-4}.\left(\frac{2}{x}\right)^4$$

$$t_5 = C_4^9\left(\frac{x}{2}\right)^{5}.\left(\frac{2}{x}\right)^4$$

$$t_5 = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^5}{32}\cdot\frac{16}{x^4} \ \Rightarrow \ t_5 = 63x$$

Clave B

5. $t_4 = t_{3+1} = C_3^5(x^3)^2y^3 = 10x^6y^3$

$\Rightarrow 6 + 3 = 9$

Clave B

6. $(3x + y^2)^5$

$t_3 = C_2^5(3x)^3(y^2)^2 \ \Rightarrow \ t_3 = \frac{5\,.\,4}{2}27x^3.y^4$

$t_3 = 270x^3y^4$

Clave A

7. $C_y^{x+1} = C_4^{y+5}$

Se observa que:

$y = 4$

$x + 1 = y + 5$

$x + 1 = 4 + 5$

$x = 8$

Nos piden:

$x + y = 8 + 4 = 12$

Clave D

8. $3^n[1\,.\,2\,.\,3\,.\,...\,.\,n] = (3^2)^{n-12}n!$

$3^n n! = 3^{2n-24}n!$

$\Rightarrow n = 2n - 24$

$\therefore n = 24$

Clave C

Resolución de problemas

9. $t_4 = t_{3+1} = C_3^n(x^2)^{n-3}(-y)^3$

Como: $GR(x) = 10$

$\Rightarrow 2(n - 3) = 10$

$\therefore \ n = 8$

Clave B

10. Sabemos:

Para $(x^\alpha + a^\beta)^n$ la suma de sus exponentes es:

$$(\alpha + \beta)\frac{n(n+1)}{2}$$

En el problema:

$$275 = (3 + 2)\ \frac{(2k(2k+1))}{2}$$

$55 = k(2k + 1)$

$5\,.\,11 = k(2k + 1) \Rightarrow k = 5$

$\therefore$ n.° términos $= 2k + 1 = 11$

Clave C

Nivel 2 (página 46) Unidad 2

Comunicación matemática

11. A) NO B) NO C) NO

12.
- Propiedad: $C_k^n = C_{n-k}^n$

  (Combinatorios complementarios)

  $\Rightarrow \ C_{10}^{99} = C_{89}^{99}$ (V)

- Propiedad: $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

  (Suma de combinatorios)

  $\Rightarrow \ C_2^7 + C_{2+1}^7 = C_3^8$ (F)

- Propiedad: $C_k^n = \frac{n}{k}C_{k-1}^{n-1}$

  (Degradación de combinatorios)

  $\Rightarrow C_{10}^{20} = 2C_9^{19}$ (V)

Clave A

Razonamiento y demostración

13. $2n! - (n - 1)(n - 1)! = 6! + 5!$

$2n(n - 1)! - (n - 1)(n - 1)! = 6\,.\,5! + 5!$

$(n - 1)!(n + 1) = 5!(6 + 1)$

$(n - 1)!(n + 1) = (6 - 1)!(6 + 1)$

$\therefore \ n = 6$

Clave E

14. Como n es par, entonces:

$$t_C \Rightarrow \frac{n+2}{2} = \frac{8+2}{2} = 5 = 4 + 1$$

Entonces:

$t_5 = C_4^8(2x)^4(-1)^4$

$t_5 = C_4^8\,.\,16x^4$

Coeficiente del t_5 es: $C_4^8\,.\,16 = 1120$

Clave B

15. $C_x^{x^2} = C_{2x}^{x^2};\ x^2 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x = 2x \ \vee \ 2x + x = x^2$

$x = 0 \ \vee \ x = 3 \ \vee \ x = 0 \ \therefore \ x = 3$

$C_{x-y}^{x+y} = 5$

Reemplazamos:

$C_{3-y}^{3+y} = 5 \Rightarrow y = 2$

Nos piden: $x + y = 5$

Clave D

16. $(x + y^2)^{20}$

$t_3 = C_2^{20}x^{20-2}(y^2)^2$

$t_3 = C_2^{20}x^{18}y^4$

Nos piden:

$$C_2^{20} = \frac{20(19)}{2} = 190$$

Clave E

17. $t_{10} = t_{9+1} = C_9^{12}(27x^5)^{12-9}\left(\frac{1}{3x}\right)^9$

$t_{10} = C_9^{12}(3^3x^5)^3 3^{-9}x^{-9} = C_9^{12}3^9x^{15}\,.\,3^{-9}x^{-9}$

$\Rightarrow t_{10} = C_9^{12}x^6$

$\therefore t_{10} = 220x^6$

Clave A

18. $t_{k+1} = C_k^{13}(x^3)^{13-k}(-2x^{-2})^k$

$t_{k+1} = C_k^{13}(-2)^kx^{39-5k}$

Del enunciado:

$39 - 5k = 14 \Rightarrow 5k = 25$

$k = 5$

Por lo tanto:

El término ocupa el lugar 6.

Clave C

19. $t_{14} = t_{13+1} = t_{k+1} \Rightarrow \ k = 13$

$t_{14} = -C_{13}^{15}\left((2x)^7\right)^{15-13}\left((2x)^{-1}\right)^{13}$

$t_{14} = -C_{13}^{15}(2x)^{14}(2x)^{-13}$

$$t_{14} = \frac{-15\,.\,14}{1\,.\,2}\,.\,2^1\,.\,x^1$$

$\therefore t_{14} = -210x$

Clave C

20.

$$\frac{(k+13)!(k+11)!}{(k+12)!+(k+11)!} = 18!$$

$$\frac{(k+13)(k+12)!(k+11)!}{(k+12)(k+11)!+(k+11)!} = 18!$$

$$\frac{(k+13)(k+12)!(k+11)!}{(k+11)!(k+12+1)} = 18!$$

$(k + 12)! = 18!$

$\therefore k + 12 = 18 \Rightarrow k = 6$

Clave D

21. Sea:

$(a + b)^m \ \Rightarrow \Sigma\text{coef.} = 2^m$

$(c + d)^n \ \Rightarrow \Sigma\text{coef.} = 2^n$

$(e + f)^p \ \Rightarrow \Sigma\text{coef.} = 2^p$

Dato:

$2^m . 2^n . 2^p = 4096$

$2^{m+n+p} = 2^{12} \Rightarrow n + m + p = 12$

Nos piden: $\dfrac{m+n+p-12}{mnp} = 0$

Clave D

Resolución de problemas

22. $C_1^6 . C_1^2 = 6 . 2 = 12$

Clave C

23. $C_1^5 . C_1^4 = 5 . 4 = 20$

Clave D

Nivel 3 (página 47) Unidad 2

Comunicación matemática

24. A. III ; B. II ; C. I

25. • Prop.: $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

(Suma de combinatorios)

$\Rightarrow C_3^{13} + C_4^{13} = C_4^{14}$ (V)

• Prop.: $C_k^n = \dfrac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$

(Degradación de combinatorios)

$\Rightarrow C_2^{101} = \dfrac{101-2+1}{2} C_1^{101} = 5050$ (F)

• Prop.: $C_k^n = \dfrac{n}{n-k} C_k^{n-1}$

(Degradación de combinatorios)

$\Rightarrow C_2^{50} = \dfrac{50}{50-2} C_2^{49} = \dfrac{25}{24} C_2^{49}$ (F)

Clave A

Razonamiento y demostración

26. $\dfrac{(3x+4)(3x+4)!(3x+6)!}{(3x+4)!(3x+5-1)} = 72!$

$\dfrac{(3x+4)(3x+6)!}{(3x+4)} = 72!$

$(3x+6)! = 72!$

$\Rightarrow 3x + 6 = 72$

$\therefore x = 22$

Clave C

27. $C_{x^2}^{24} = C_{2x}^{24}$

$x^2 = 2x \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$

$x^2 + 2x = 24$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

x 6 } x = 4

x −4 } ∨ x = −6

$\therefore$ CS = {0; 2; 4}

Clave B

28. $\underbrace{C_n^{n+1} . C_{n+1}^{n+2} . C_{n+2}^{n+3} \cdots C_{n+(n-1)}^{n+n}}_{n \text{ factores}}$

Por definición:

$\dfrac{(n+1)!}{n!.1!} \cdot \dfrac{(n+2)!}{(n+1)!.1!} \cdot \dfrac{(n+3)!}{(n+2)!.1!} \cdots \dfrac{(2n)!}{(2n-1)!.1!} = \dfrac{(2n)!}{n!}$

Clave D

29. $(2x^2 - 3)^5$

Sea:

T.I. $= t_{k+1} = C_k^5 (2x^2)^{5-k}(-3)^k$

T.I. $= C_k^5 2^{5-k}(-3)^k(x^2)^{5-k}$

Por dato:

$5 - k = 0 \Rightarrow k = 5$

Luego:

T.I. $= C_5^5 2^{5-5}(-3)^5 = -243$

Clave C

30. $t_9 = C_8^{12}(x^n)^{12-8} . (x^{-m})^8 = C_8^{12} x^{4n-8m}$

$\Rightarrow 4n - 8m = 0 \quad \therefore n = 2m$ ...(I)

$t_{14} = C_3^{12}(x^n)^{12-3} . (x^{-m})^3 = C_3^{12} x^{9n-3m}$

$\Rightarrow 9n - 3m = 15$ ...(II)

(I) en (II):

$18m - 3m = 15 \Rightarrow m = 1$

$n = 2$

$t_5 = C_4^{12}(x^2)^{12-4} . (x^{-1})^4$

$t_5 = C_4^{12} . x^{12} \quad \therefore$ GA = 12

Clave B

31. $P = \underbrace{\dfrac{0!}{2!} + \dfrac{1!}{3!} + \dfrac{2!}{4!} + \ldots + \dfrac{25!}{27!}}_{\text{"26" sumandos}}$

Analizamos "P" para:

1 Sumando:

$P = \dfrac{0!}{2!} = \dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}$

2 Sumandos:

$P = \dfrac{0!}{2!} + \dfrac{1!}{3!} = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$

3 Sumandos:

$P = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$

Para "n" sumando:

$P = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$P = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \ldots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

$P = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

$n = 26 \Rightarrow P = 1 - \dfrac{1}{27} = \dfrac{26}{27}$

Clave E

Resolución de problemas

32. $P(x; y; z) = (x^2y + z)^n$

$t_7 = t_{6+1} = C_6^n (x^2y)^{n-6} z^6$

Dato:

Grado $t_7 \Rightarrow 3(n-6) + 6 = 30$

$3(n-6) = 24 \Rightarrow n = 14$

$t_{central} = t_{\frac{14}{2}+1} = t_{7+1} = C_7^n (x^2y)^{n-7} . z^7$

Nos piden:

Grado $t_8 = 3(n-7) + 7 = 3(14-7) + 7 = 28$

Clave A

33. $P(x) = \left(mx^2 + \dfrac{n}{x}\right)^{m+n}$

Sea:

$t_{k+1} = C_k^{m+n}(mx^2)^{m+n-k}\left(\dfrac{n}{x}\right)^k$

Reducimos:

$t_{k+1} = C_k^{m+n} m^{m+n-k} . n^k . x^{2m+2n-3k}$

Sabemos por dato:

$2m + 2n - 3k = 2$ ...(I)

Σ coef.P(x) = P(1) $= (m+n)^{m+n} = 2^{64}$

$(m+n)^{m+n} = 2^{4.16} = 16^{16}$

$m + n = 16$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I):

$2(16) - 3k = 2 \Rightarrow k = 10$

El lugar que ocupa es: $k + 1 = 10 + 1 = 11$

Clave C

34. $P(x; y) = (x + 2y)^n$

Sabemos que:

$t_5 = t_{4+1} = C_4^n x^{n-4}(2y)^4$

$t_5 = 2^4 C_4^n x^{n-4} . y^4$

Dato:

$t_5 = 2k C_4^k x^{k-4} . y^4$

Luego:

$2k = 2^4 \Rightarrow k = 8$

$n = k = 8$

$t_6 = t_{5+1} = C_5^8 x^{8-5}(2y)^5$

$t_6 = 2^5 C_5^8 x^4y^5$

Nos piden:

coef . $t_6 = 2^5 C_5^8 = 32 \dfrac{\lfloor 8}{\lfloor 5 \times \lfloor 3} = 1792$

Clave B

35. $R(x) = \left(3x^2 + \dfrac{1}{9x}\right)^9$

$t_k = t_{m+1} = C_m^n (3x^2)^{n-m} . \left(\dfrac{1}{9x}\right)^m$

$t_k = t_{m+1} = C_m^9 (3x^2)^{9-m}\left(\dfrac{1}{9x}\right)^m$

$t_k = t_{m+1} = C_m^9 3^{9-3m} . x^{18-3m}$

Por dato tenemos:

$18 - 3m = 0$

$m = 6$

$k = m + 1 \quad \therefore k = 7$

Clave C

36. $Q(x; y) = (x^2 - y^3)^n$

$t_6 = t_{5+1} = -C_5^n (x^2)^{n-5} . (y^3)^5$

$t_6 = t_{5+1} = -C_5^n x^{2n-10} . y^{15}$

Del dato tenemos:

$2n - 10 = 8$

$\therefore n = 9$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 50) Unidad 2

Comunicación matemática

1. Solución:

A	S	C	B	S	D	G	I	F	Y	R	A	X	J	N
H	E	Y	G	X	H	O	M	O	G	E	N	E	O	S
X	T	T	J	L	M	Z	Q	Z	N	V	F	I	D	E
I	N	D	N	F	R	A	D	I	C	A	C	I	O	N
C	A	N	P	A	H	O	T	Y	N	A	T	S	U	R
S	J	B	K	I	Z	V	R	D	Z	R	U	V	O	B
Y	E	D	O	B	L	I	X	I	H	O	Y	K	Q	C
T	M	E	C	J	M	O	L	H	Q	U	S	P	T	G
Z	E	A	S	H	S	A	K	A	P	B	F	S	C	A
I	S	X	T	R	N	T	E	J	N	L	X	E	P	I
D	D	B	C	O	D	O	B	P	L	O	K	M	F	L
Z	J	M	I	Z	H	Y	G	H	N	J	I	E	V	E
E	V	C	E	A	B	R	D	G	V	M	P	C	Q	X
U	A	G	X	D	J	S	E	L	B	O	D	T	A	H
R	F	C	H	N	K	I	O	V	K	Z	L	M	S	R

2. Resolución:

A. IV B. III C. V D. II E. I

Razonamiento y demostración

3. $L = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} + \frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{16}{\sqrt[3]{2}}$

$L = \frac{16.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{16.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{16\sqrt[3]{4}}{2} = 8(\sqrt[3]{4})$

Clave A

4. $S = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$

$S = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Clave A

5. $M = \sqrt{\underbrace{28}_{25+3} - 2\sqrt{\underbrace{75}_{25\,.\,3}}} + \sqrt{3} - \sqrt{4}$

$M = (\sqrt{25} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 2)$
$M = 5 - 2 = 3$

Clave A

6. Multiplicamos a cada fracción su conjugada:

$\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}$

Clave D

7. $\frac{\sqrt{9+3+2\sqrt{9.3}}}{\sqrt{9+3-2\sqrt{9.3}}} = \frac{\sqrt{9}+\sqrt{3}}{\sqrt{9}-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

Racionalizamos:

$= \frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$

$= \frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6}$

$= 2 + \sqrt{3}$

Clave D

8. $Q = \sqrt{\underbrace{19}_{16+3} + 2\sqrt{\underbrace{48}_{16\,.\,3}}} - \sqrt{3}$

$Q = (\sqrt{16} + \sqrt{3}) - \sqrt{3}$

$Q = 4$

Clave B

9. $M = \sqrt{11 + \sqrt{4.10}} - \sqrt{10}$

$M = \sqrt{\underbrace{11}_{10+1} + 2\sqrt{\underbrace{10}_{10\,.\,1}}} - \sqrt{10}$

$M = (\sqrt{10} + \sqrt{1}) - \sqrt{10}$

$M = 1$

Clave E

Resolución de problemas

10. $\sqrt{6}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{16.3}+\sqrt{3}-\sqrt{25.5}}{\sqrt{4.3}+\sqrt{16.3}-\sqrt{36.5}} + \frac{3+2\sqrt{15}}{6}}\right] - \sqrt{5}$

$\sqrt{6}\left[\sqrt{\frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{5}}{6\sqrt{3}-6\sqrt{5}} + \frac{3+2\sqrt{15}}{6}}\right] - \sqrt{5}$

$\sqrt{6}\left[\sqrt{\frac{5+3+2\sqrt{15}}{6}}\right] - \sqrt{5}$

$\sqrt{6}\left[\frac{\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5.3}}}{\sqrt{6}}\right] - \sqrt{5}$

$\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} = \sqrt{3}$

Clave A

11. $\frac{\sqrt{26-2\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} = a + \sqrt{b}$

Factorizamos y racionalizamos:

$\sqrt{\frac{2(13-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}} = a + \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{2(32+10\sqrt{7})}{2}} = a + \sqrt{b}$

$\sqrt{32 + 2\sqrt{175}} = a + \sqrt{b}$

$\sqrt{(25+7) + 2\sqrt{25.7}} = a + \sqrt{b}$

$\sqrt{25} + \sqrt{7} = a + \sqrt{b}$

$\Rightarrow a = 5 \ \wedge \ b = 7$

$\therefore a^2 - b = 18$

Clave E

Nivel 2 (página 50) Unidad 2

Comunicación matemática

12. El factor racionalizante es la expresión irracional que multiplicada por el denominador irracional lo convierte en una expresión racional.

13. I. $\sqrt[9]{a^9b^{27}c^{20}d^{10}} = \sqrt[9]{a^{\boxed{9}}(b^3)^{\boxed{9}}(c^2)^{\boxed{9}}c^{\boxed{2}}d^{\boxed{9}}d}$

$\sqrt[9]{a^{\boxed{9}}}\sqrt[9]{(b^3)^{\boxed{9}}}\sqrt[9]{(c^2)^{\boxed{9}}}\sqrt[9]{d^{\boxed{9}}}\sqrt[9]{c^{\boxed{2}}d}$

$= a^{\boxed{1}}b^{\boxed{3}}c^{\boxed{2}}d^{\boxed{1}}\sqrt[9]{c^{\boxed{2}}d}$

$\therefore \sqrt[9]{a^9b^{27}c^{20}d^{10}} = ab^3c^2d\sqrt[9]{c^2d}$

II. $\sqrt{10+\sqrt{84}} = \sqrt{10+\sqrt{4\,.\,\boxed{21}}} = \sqrt{10+2\sqrt{\boxed{21}}}$

$= \sqrt{\left(7+\boxed{3}\right)+2\sqrt{\boxed{7}\,.\,\boxed{3}}} = \sqrt{\boxed{7}}+\sqrt{\boxed{3}}$

$\therefore \sqrt{10+\sqrt{84}} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$

III. $\dfrac{7}{\sqrt[7]{x^3}} = \dfrac{7}{\sqrt[7]{x^3}}\left(\dfrac{\sqrt[7]{x^{\boxed{7}-\boxed{3}}}}{\sqrt[7]{x^{\boxed{7}-\boxed{3}}}}\right)$

$= \dfrac{7\sqrt[7]{x^{\boxed{4}}}}{\sqrt[7]{x^3}\sqrt[7]{x^{\boxed{4}}}} = \dfrac{7\sqrt[7]{x^{\boxed{4}}}}{\sqrt[7]{x^{\boxed{7}}}}$

$= \dfrac{7\sqrt[7]{x^{\boxed{4}}}}{x^{\boxed{1}}}$

$\therefore \dfrac{7}{\sqrt[7]{x^3}} = \dfrac{7\sqrt[7]{x^4}}{x}$

Razonamiento y demostración

14. Racionalizamos:

$$\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$= (2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2 = 2[2^2+\sqrt{3}^2]$

$= 2[4+3] = 14$

Clave D

15. Racionalizamos:

$$\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}\cdot\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}$$

$= \dfrac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})^2}{-2} = \dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{-2}$

$= \sqrt{x^2-1}-x$

Clave E

16. $S = \dfrac{24}{\sqrt[3]{3}} - \left(\dfrac{16}{2}\right)\sqrt[3]{9}$

$S = \dfrac{24.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{3^2}} - 8\sqrt[3]{9} = \dfrac{24\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} - 8\sqrt[3]{9}$

$S = \dfrac{(24)\sqrt[3]{9}}{3} - (8)\sqrt[3]{9} = 8\sqrt[3]{9} - 8\sqrt[3]{9} = 0$

Clave E

17. $M = \sqrt{\underset{6+5}{11} - 2\sqrt{\underset{6.5}{30}}} - \sqrt{\underset{6+3}{9}+2\sqrt{\underset{6.3}{18}}} + \sqrt{5}$

$M = \sqrt{6}-\sqrt{5}-(\sqrt{6}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$

$M = \sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$M = -\sqrt{3}$

Clave B

18. $F = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3\times 2}+\sqrt{3\times 5}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

$F = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

$F = \dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)}$

Racionalizamos:

$F = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$F = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

Clave B

19. $\sqrt{\underset{5+2}{7}+2\sqrt{\underset{5.2}{10}}} = \sqrt{a-1}+\sqrt{b-3}$

$\sqrt{5}+\sqrt{2} = \sqrt{a-1}+\sqrt{b-3}$

$\Rightarrow a-1=5 \quad \wedge \quad b-3=2$

$a=6 \quad \wedge \quad b=5$

$\therefore \sqrt{a-b} = \sqrt{1} = 1$

Clave E

20. Dando forma:

$$\frac{8}{\sqrt{5}\sqrt{3}+\sqrt{5}-(\sqrt{3}+1)}$$

Factorizamos:

$$\frac{8}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

Racionalizamos:

$$\frac{8(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

Luego:

$$\frac{8(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{2\,.\,4} = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)$$

Su denominador es 1.

Clave A

Resolución de problemas

21. $\sqrt{\underbrace{\alpha x+\theta y}_{A}+\sqrt{\underbrace{(\alpha\theta+\delta)xy}_{B}}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}}+\sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

Como: $B \neq 0 \Rightarrow \alpha\theta+\delta \neq 0$ ...(1)

Además:

$C = \sqrt{A^2-B}$

$\Rightarrow C = \sqrt{(\alpha x+\theta y)^2-(\alpha\theta+\delta)xy}$

$C = \sqrt{\alpha^2x^2+2\alpha x\theta y+\theta^2y^2-\alpha\theta xy-\delta xy}$

$C = \sqrt{\underbrace{\alpha^2x^2+(\alpha\theta-\delta)xy+\theta^2y^2}_{\text{Debe formarse un cuadrado perfecto}}}$

Se cumple:

$\Delta = (\alpha\theta-\delta)^2-4\alpha^2\theta^2 = 0$

$[(\alpha\theta-\delta)-2\alpha\theta][(\alpha\theta-\delta)+2\alpha\theta] = 0$

$[\delta+\alpha\theta][3\alpha\theta-\delta] = 0$ ...(2)

De (1): $\delta+\alpha\theta \neq 0$

Luego en (2):

$3\alpha\theta - \delta = 0$

$\therefore \frac{\alpha\theta}{\delta} = \frac{1}{3}$

Clave D

22. De los datos:

$GR(m) = \frac{3}{7} \Rightarrow m^{\frac{3}{7}}$

$GR(n) = \frac{14}{49} = \frac{2}{7} \Rightarrow n^{\frac{2}{7}}$

$GR(p) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \Rightarrow p^{\frac{1}{7}}$

Donde:

$$\frac{N}{m^{\frac{3}{7}}n^{\frac{2}{7}}p^{\frac{1}{7}}} = \frac{N}{\sqrt[7]{m^3n^2p}} = \frac{N}{\sqrt[7]{m^3n^2p}}\left(\frac{\sqrt[7]{m^4n^5p^6}}{\sqrt[7]{m^4n^5p^6}}\right)$$

$$= \frac{N\sqrt[7]{m^4n^5p^6}}{mnp}$$

Clave E

Nivel 3 (página 52) Unidad 2

Comunicación matemática

23. $\frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)$

$= (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) > 0$

Clave C

24. I. $\frac{\sqrt[7]{7a^{10}b^{16}c^{21}}}{\sqrt[7]{63a^3b^2c}} = \frac{ab^2c^3\sqrt[7]{7a^3b^2}}{\sqrt[7]{7.9a^3b^2c}} = \frac{ab^2c^3}{\sqrt[7]{9c}}\left(\frac{\sqrt[7]{9^6c^6}}{\sqrt[7]{9^6c^6}}\right)$

$\Rightarrow FR = \sqrt[7]{(9c)^6}$ (correcto)

II. $\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{4^2-12}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{4^2-12}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}}$

$= \sqrt{3}+1$ (correcto)

III. Hay 2 grupos de radicales semejantes:

- $\sqrt[9]{x^7}$ y $7\sqrt[9]{x^7}$
- $\sqrt[9]{10x}$; $34\sqrt[9]{10x}$; $-2\sqrt[9]{10x}$

Luego III. (Incorrecto)

IV. MCM (6; 3, 4) = 12

$\Rightarrow \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6.2]{a^{5.2}} = \sqrt[12]{a^{10}}$

$\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3.4]{b^{2.4}} = \sqrt[12]{b^8}$

$\sqrt[4]{c^3} = \sqrt[4.3]{c^{3.3}} = \sqrt[12]{c^9}$

El exponente de "c" en el radicando es 9 y no 10.

Luego IV. (Incorrecto)

$\therefore$ Solo I y II son correctas.

Clave D

Razonamiento y demostración

25. $T = \left(\frac{21}{\sqrt{7}}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right)^6$

$= (3\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^6 = 9.7 - 3^{\frac{6}{2}} = 36$

Clave D

26. Multiplicamos por la conjugada a cada fracción:

$$M = \frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}\times\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})} - \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} + \frac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})}\times\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$

$$M = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} - \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$$

Luego:

$$M = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} = 0$$

Clave E

27. $A = \sqrt{11+2\sqrt{30}} + \sqrt{13-2\sqrt{40}}$

$A = \sqrt{11+2\sqrt{6\times5}} + \sqrt{13-2\sqrt{8\times5}}$

$A = \sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{8}-\sqrt{5} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+2)$

Clave E

28. $M = (2\sqrt{6}-1)(\sqrt{25+2\sqrt{24\times1}})$

$M = (2\sqrt{6}-1)(\sqrt{24}+1)$

$M = (2\sqrt{6}-1)(2\sqrt{6}+1) = (2\sqrt{6})^2 - 1$

$M = 24 - 1 = 23$

El opuesto de M es -23.

Clave E

29. $C = \sqrt{3+\sqrt{7}}\,(\sqrt{13+\sqrt{7}} - \sqrt{5+\sqrt{7}})$

$C = \sqrt{(3+\sqrt{7})(13+\sqrt{7})} - \sqrt{(3+\sqrt{7})(5+\sqrt{7})}$

$C = \sqrt{39+16\sqrt{7}+7} - \sqrt{15+8\sqrt{7}+7}$

$C = \sqrt{46+16\sqrt{7}} - \sqrt{22+8\sqrt{7}}$

$C = \sqrt{2}(\sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{11+4\sqrt{7}})$

$C = \sqrt{2}(\sqrt{23+2\sqrt{16.7}} - \sqrt{11+2\sqrt{7.4}})$

$C = \sqrt{2}(\sqrt{16}+\sqrt{7}-\sqrt{7}-\sqrt{4})$

$C = \sqrt{2}(4-2) = 2\sqrt{2}$

Clave C

30. $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3.2}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{3}+\sqrt{2} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\therefore a^2+b^2 = 3^2+2^2 = 13$

Clave E

31. $E = \sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

Pasamos a radicales simples:

$E = \sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}$

$E = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$

Clave A

32. $\sqrt{13}+A = \frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{12}+\sqrt{5}}{\sqrt{12}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{13}-\sqrt{12}}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}$

$\sqrt{13}+A = \frac{7(\sqrt{12}+\sqrt{5})}{7} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{12}}{1}$

$$\sqrt{13} + A = \sqrt{12} + \sqrt{5} + \sqrt{13} - \sqrt{12}$$

$$A = \sqrt{5} \Rightarrow A^2 = 5$$

Clave B

Resolución de problemas

33. $M = \dfrac{\left(\sqrt{a^2+ax+x^2} - \sqrt{a^2-ax+x^2}\right)\left(\sqrt{a^2+ax+x^2} + \sqrt{a^2-ax+x^2}\right)}{\left(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}\right)\left(\sqrt{a^2+ax+x^2} + \sqrt{a^2-ax+x^2}\right)}$

$$M = \frac{2ax}{(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a^2+ax+x^2} + \sqrt{a^2-ax+x^2})}$$

Multiplicamos al numerador y denominador por $(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})$ resulta:

$$M = \frac{2ax(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{2x(\sqrt{a^2+ax+x^2} + \sqrt{a^2-ax+x^2})}$$

$$M = \frac{a(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{(\sqrt{a^2+ax+x^2} + \sqrt{a^2-ax+x^2})} \quad \text{...(1)}$$

Reemplazamos x = 0 en (1):

$$\Rightarrow M = \frac{a.2\sqrt{a}}{2.a}$$

$$\therefore M = \sqrt{a}$$

Clave B

34. Multiplicamos por 100:

$$100B = \sqrt{100(0,12 + 0,02\sqrt{35})100(0,14 - 0,02\sqrt{33})}$$

$$100B = \sqrt{(5+7) + 2\sqrt{5.7}}\sqrt{(11+3) - 2\sqrt{11.3}}$$

$$100B = (\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{11} - \sqrt{3})$$

$$100B = = \sqrt{55} - \sqrt{15} + \sqrt{77} - \sqrt{21} \quad \text{...(1)}$$

Por condición del problema B es equivalente a:

$$B = \sqrt{0,000x} - \sqrt{0,000y} + \sqrt{0,000z} - \sqrt{0,000\,w}$$

Multiplicamos por 100:

$$100B = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{w} \quad \text{...(2)}$$

De (1) y (2); tener en cuenta que: $w > y$

$$T = \left(\frac{55 + 77}{66}\right)^{21-15} = 64$$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 55) Unidad 2

Comunicación matemática

1. NO – SÍ – NO

2.

Razonamiento y demostración

3. $(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i$

$N = \dfrac{2i(1+3i)}{i-3} \Rightarrow N = \dfrac{2(i+3i^2)}{i-3}$

$N = \dfrac{2(i-3)}{i-3} \qquad \therefore\ N = 2$

Clave A

4. $\dfrac{8i(6-3i+4i+2)}{1-8i}$

$\dfrac{i(8i(8+i))}{i(1-8i)} = \dfrac{8i^2(8+i)}{i+8} = -8$

Clave B

5. $z_1 = \dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^n}(1-i)^2 = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n(1-i)^2$

$z_1 = i^n(-2i) = -2i^{n+1}$

Clave C

6. Por dato: $z = 12 + \sqrt{52}\,i$

$\sqrt{z} = \sqrt{12 + 2\sqrt{13}\,i}$

$\sqrt{z} = \sqrt{12 + 2\sqrt{-13}}$

$\Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{13 + (-1) + 2\sqrt{13(-1)}}$

$\therefore\ \sqrt{z} = \sqrt{13} + \sqrt{-1} = \sqrt{13} + i$

Clave C

7. $E = i^{32} + i^{4376} + i^{99800}$

Recuerda: $i^{\overset{\circ}{4}} = 1$

$E = i^{\overset{\circ}{4}} + i^{\overset{\circ}{4}} + i = 1 + 1 + i = 2 + i$

Clave B

8. $\dfrac{2i-(-2i)}{(2i)^2} = \dfrac{2i+2i}{4i^2} = \dfrac{4i}{-4} = -i$

Clave C

9. $z = 1 + i$

Sea:

$E = z^{-z^{-(\bar{z})^4}} \qquad \text{...(I)}$

$z = 1 + i \Rightarrow \bar{z} = 1 - i$

$\bar{z}^4 = (1-i)^4 = -4$

En (I): $E = z^{-z^{-(-4)}} = z^{-z^4}$

Sabemos que: $z^4 = (1+i)^4 = -4$

$\Rightarrow E = z^{-(-4)} = z^4 = -4$

Clave C

Resolución de problemas

10. Sea:

$z = a + bi$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(a+bi)} \times \dfrac{(a-bi)}{(a-bi)} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

Del enunciado:

$a + bi + \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = a - bi$

$\left(a + \dfrac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(b - \dfrac{b}{a^2+b^2}\right)i = a - bi$

Igualamos:

$a + \dfrac{a}{a^2+b^2} = a$

$\dfrac{a}{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow a = 0$

$b - \dfrac{b}{a^2+b^2} = -b$

$\dfrac{-b}{a^2+b^2} = -2b \Rightarrow a^2 + b^2 = \dfrac{1}{2}$

$0^2 + b^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Luego:

$z = a + bi = \pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$

Clave E

11. $P(z) = az^2 + bz + c$

α y β son raíces:

Sabemos que:

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \quad \wedge \quad \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

Nos piden:

$S = (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2)$

$= 2[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$

$= 2\left[\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{c}{a}\right]$

$= 2\left[\dfrac{b^2-2ac}{a^2}\right] \qquad \text{...(I)}$

Dato: $b^2 - 4ac = 2a^2 - 2ac$

$b^2 - 2ac = 2a^2$

Reemplazamos en (I):

$S = \dfrac{2(2a^2)}{a^2} = 4$

Clave D

Nivel 2 (página 55) Unidad 2

Comunicación matemática

12. I. (V)

De acuerdo a la distribución gráfica:

$\left.\begin{array}{l} z_1 = 6 + 4i \\ z_2 = -4 + 2i \\ z_3 = -2 - 6i \end{array}\right\} z_1 + z_2 + z_3 = 0$

A su vez $z_2^{4^0} = z_2$

II. (V)

Operando: $\dfrac{1}{3}(4-2i)$

III. (F)

$\dfrac{|3-i|(1+i)}{|i+2|(5+i)} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+i}{5+i}\right)\left(\dfrac{5-i}{5-i}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{13}(3+2i)$

Clave D

13. I. Número complejo

II. Unidad imaginaria

III. Conjugados

IV. Opuestos

V. Trigonométrica

Razonamiento y demostración

14. $z = \dfrac{(a+2i)(b+3i)}{(b-3i)(b+3i)}$; (z: número real)

$z = \dfrac{ab - 6 + i(3a+2b)}{b^2 - (3i)^2}$

$\Rightarrow z = \dfrac{ab-6}{b^2+9} + \underbrace{\dfrac{(3a+2b)}{b^2+9}}_{0}i$

$\Rightarrow 3a + 2b = 0 \qquad \text{...(1)}$

$w = \dfrac{(b+(a+8)i)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$; (w: imaginario puro)

$w = \dfrac{ab + (a+8)b + i\left(a(a+8) - b^2\right)}{a^2+b^2}$

$w = \underbrace{\dfrac{b(2a+8)}{a^2+b^2}}_{0} + \dfrac{(a^2+8a-b^2)}{a^2+b^2}i$

$\Rightarrow b(2a+8) = 0$

$\Rightarrow b = 0 \ \vee \ a = -4 \qquad \text{...(2)}$

Reemplazamos: (2) en (1):

Si $b = 0 \Rightarrow a = 0$

Estos valores hacen que w no sea un imaginario puro.

Si $a = -4 \Rightarrow b = 6$

Cumplen las condiciones del enunciado.

$\therefore\ a - b = (-4) - (6) = -10$

Clave E

15. $\left((\sqrt{2}i-1)^2\right)^2(\sqrt{2}i-1)$

$(2i^2 - 2\sqrt{2}i + 1)^2(\sqrt{2}i-1)$

$(-1-2\sqrt{2}i)^2(\sqrt{2}i-1)$

$(1 + 4\sqrt{2}i + 8i^2)(\sqrt{2}i-1)$

$(4\sqrt{2}i - 7)(\sqrt{2}i-1)$

$8i^2 - 4\sqrt{2}i - 7\sqrt{2}i + 7$

$-1 - 11\sqrt{2}i$

Clave C

16. $\dfrac{i(2006+2005i)}{2005i+2006} + \dfrac{2005i-2004}{i(2005i-2004)}$

$+\dfrac{i(2007+2006i)}{2006i+2007}$

$i + \dfrac{1}{i} + i = i - i + i = i$

Clave D

17. $\dfrac{(2+i)^4(2+i)}{2+i^4.i} = x + yi$

$\dfrac{((2+i)^2)^2(2+i)}{(2+i)} = x + yi$

$(4 + 4i + i^2)^2 = x + yi \;\Rightarrow\; (3 + 4i)^2 = x + yi$

$9 + 24i + 16i^2 = x + yi \;\Rightarrow\; -7 + 24i = x + yi$

$\therefore\; x + y = -7 + 24 = 17$

Clave C

18. $E = ((a + i)^2)^2 = (a^2 + 2ai + i^2)^2 \Rightarrow E = (a^2 - 1 + 2ai)^2$

$E = (a^2 - 1)^2 + 2(a^2 - 1)(2a)i + (2ai)^2$

$E = (a^2 - 1)^2 - 4a^2 + \underbrace{4a(a + 1)(a - 1)i}_{0}$

$\Rightarrow a = 0 \;\vee\; a = -1 \;\vee\; a = 1$

Por lo tanto, el número de valores que toma **a** es 3.

Clave D

19. $z_1 = \sqrt{a^{2b} - b^{2a} + 2a^b b^a i} \;\Rightarrow\; z_1 = \sqrt{(a^b + b^a i)^2} = a^b + b^a i$

$z_2 = \sqrt{b^{2a} - a^{2b} + 2a^b b^a i} \;\Rightarrow\; z_2 = \sqrt{(b^a + a^b i)^2} = b^a + a^b i$

Dato:

$z_1 + z_2 = (a^b + b^a i) + (b^a + a^b i) = ab(1 + i)$

$(a^b + b^a) + (b^a + a^b)i = ab(1 + i)$

$(a^b + b^a)(1 + i) = ab(1 + i)$

$a^b + b^a = ab \Rightarrow \dfrac{a^b + b^a}{ab} = 1 \;\therefore\; \dfrac{b^{a-1}}{a} + \dfrac{a^{b-1}}{b} = 1$

Clave A

20. $w = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$P = \dfrac{(a + b)(a + bw)(a + bw^2)}{(aw^2 + bw)(bw^2 + aw)}$

Como: $w^2 = \overline{w} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $w\overline{w} = |w|^2 = 1$

$\Rightarrow P = \dfrac{(a + b)(a + bw)(a + b\overline{w})}{(a\overline{w} + bw)(b\overline{w} + aw)}$

$P = \dfrac{(a + b)(a^2 + ab\overline{w} + abw + b^2 w\overline{w})}{ab\overline{w}^2 + a^2 w\overline{w} + b^2 w\overline{w} + abw^2}$

$P = \dfrac{(a + b)(a^2 + ab\overline{w} + abw + b^2)}{(ab\overline{w}^2 + a^2 + b^2 + abw^2)}$

Pero: $\overline{w}^2 = w$

$\Rightarrow P = \dfrac{(a + b)(a^2 + ab\overline{w} + abw + b^2)}{(abw + a^2 + b^2 + ab\overline{w})} \quad \therefore\; P = a + b$

Clave E

Resolución de problemas

21. Sean los complejos: $A = m + ni$ y

$\overline{A} = m - ni$

$|A| = |\overline{A}| = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{7} \;\Rightarrow\; m^2 + n^2 = 7$ ...(1)

$\dfrac{A}{\overline{A}} = qi \;\Rightarrow\; \dfrac{m + ni}{m - ni} = qi$

$m + ni = mqi + nq \;\Rightarrow\; m = nq$ ...(2)

$n = mq$ ...(3)

(2) ÷ (3):

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{nq}{mq} \;\Rightarrow\; m^2 = n^2 \;\Rightarrow\; m = \pm n$ ...(4)

(4) en (1):

$n^2 + n^2 = 7 \;\Rightarrow\; 2n^2 = 7$

Si: $n = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ ...(5)

(5) en (4):

Si: $n = \sqrt{\dfrac{7}{2}} \;\Rightarrow\; m = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}} \;\Rightarrow\; n = -\sqrt{\dfrac{7}{2}} \Rightarrow m \mp \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

La diferencia de los complejos es:

$A - \overline{A}$ ó $\overline{A} - A$

Veamos:

Si: $n = \sqrt{\dfrac{7}{2}} \;\Rightarrow\; m = \pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$A = +\sqrt{\dfrac{7}{2}} + \sqrt{\dfrac{7}{2}}i \quad \vee \quad A = -\sqrt{\dfrac{7}{2}} + \sqrt{\dfrac{7}{2}}i$

$\Rightarrow \overline{A} = \sqrt{\dfrac{7}{2}} - \sqrt{\dfrac{7}{2}}i \qquad \Rightarrow \overline{A} = -\sqrt{\dfrac{7}{2}} - \sqrt{\dfrac{7}{2}}i$

$A - \overline{A} = 2\sqrt{\dfrac{7}{2}}i \qquad A - \overline{A} = 2\sqrt{\dfrac{7}{2}}i$

$\overline{A} - A = -2\sqrt{\dfrac{7}{2}}i \qquad \overline{A} - A = -2\sqrt{\dfrac{7}{2}}i$

Una de las diferencias es: $A - \overline{A} = -2\sqrt{\dfrac{7}{2}} = -\sqrt{14}$

Clave A

22. $(-(q + 3) + 10i)((q + 3) + 10i) = -125$

$(10i - (q + 3))(10i + (q + 3)) = -125$

$100i^2 - (q + 3)^2 = -125$

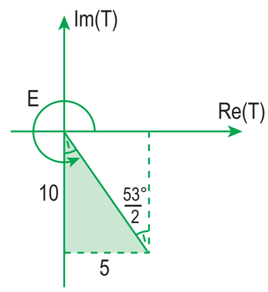
$-100 - (q + 3)^2 = -125$

$-(q + 3)^2 = -25 \;\Rightarrow\; q + 3 = \pm 5$

$q + 3 = 5 \quad \vee \quad q + 3 = -5$

$E \in \text{IVC} \;\Rightarrow\; q + 3 = 5$

$q = 2$



$\Rightarrow E = 270° + \dfrac{53°}{2}$

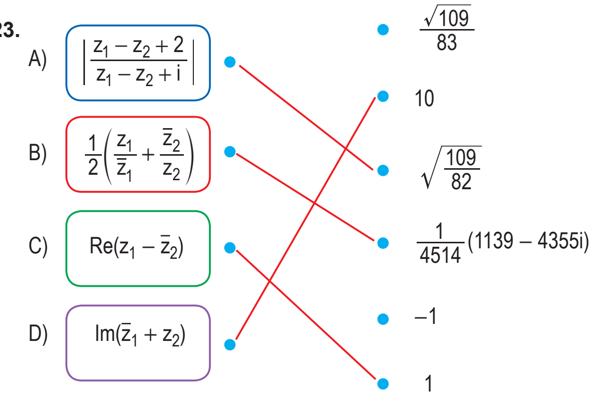
$E = 296{,}5°$

Clave E

Nivel 3 (página 56) Unidad 1

Comunicación matemática

23.



24. Por teoría: II y IV no son correctas.

Razonamiento y demostración

25. $z_2 = i^{\overset{\circ}{4}+3} + i^{\overset{\circ}{4}+3} + i^{\overset{\circ}{4}+2} + i^{\overset{\circ}{4}}$

$z_2 = i^3 + i^3 + i^2 + 1$

$z_2 = 2i^3 + i^2 + 1 = -2i - 1 + 1$

$\therefore\ z_2 = -2i$

Clave D

26. $\dfrac{3+2i}{2-i} + \dfrac{(5-i)i}{(2i)i} + 2i = a + bi$

$\dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + \dfrac{5i+1}{-2} + 2i = a + bi$

$\dfrac{4+7i}{5} - \dfrac{5i+1}{2} + 2i = a + bi$

$\dfrac{9}{10}i + \dfrac{3}{10} = a + bi$

$\Rightarrow\ a = \dfrac{3}{10}\quad y\quad b = \dfrac{9}{10}$

Clave A

27. $\dfrac{x-1}{3+i} + \dfrac{y-1}{3-i} = i$

$\dfrac{(x-1)(3-i)+(y-1)(3+i)}{(3+i)(3-i)} = i$

$3(x-1) - (x-1)i + 3(y-1) + (y-1)i = 10i$

Reducimos:

$3(x + y - 2) + (y - x)i = 10i$

Donde:

$3(x + y - 2) = 0\ \wedge\ y - x = 10$

$\Rightarrow x + y = 2$

Luego:

$x = -4\quad \wedge\quad y = 6$

Entonces:

$y - x = 10$

Clave C

28. Como: $i^5 = i^1 = i^{17}$

Luego:

$z = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{2i}} = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{(1+i)^2}}$

$z = \sqrt{2\sqrt{i} - 1 - i} = \sqrt{2\sqrt{-1}} = \sqrt{2i}$

$z = \sqrt{(1+i)^2} = 1 + i$

Piden: $|z|$

Entonces: $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Clave E

29. $z = \left[\left[\left(\dfrac{3+i}{2-i}\right)^i\right]^2\right]^{i^3} = \left(\dfrac{3+i}{2-i}\right)^{2i^4} = \left(\dfrac{3+i}{2-i}\right)^2$

$z = \left[\dfrac{(3+i)}{(2-i)}\cdot\dfrac{(2+i)}{(2+i)}\right]^2 = \left[\dfrac{6+5i+i^2}{4-i^2}\right]^2 = \left[\dfrac{5+5i}{5}\right]^2$

Luego:

$z = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

Clave C

30. $f(0) = 0 \Rightarrow f(1) = f(0) + if(1)$

$f(a + bi) = f(b) + if(a)$

Nos piden: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2002} f(k+i)$

$k = 1 \Rightarrow f(1 + i) = f(1) + if(1) \in \mathbb{R}$

$f(1) = 0$

Luego: $f(1 + i) = 0 + i0 = 0$

$k = 2 \Rightarrow f(2 + i) = f(1) + if(2) \in \mathbb{R}$

$f(2) = 0$

Luego: $f(2 + i) = 0 + i0 = 0$

$k = 3 \Rightarrow f(3 + i) = f(1) + if(3) \in \mathbb{R}$

$f(3) = 0$

Luego: $f(3 + i) = 0 + i0 = 0$

$\vdots$

$f(2002 + i) = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{2002} f(k+i) = f(1+i) + f(2+i) + \ldots + f(2002+i)$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{2002} f(k+i) = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$

Clave C

31. $z = -\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1-i} . i^i$

$z = (-1)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1-i} . i^i$

Pasamos a su forma exponencial: $-1 = e^{\pi i}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i = e^{\frac{\pi}{4}i}$

$i = e^{\frac{\pi}{2}i}$

Reemplazamos:

$z = e^{\pi i}.\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{1-i}.\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{i}$

$z = e^{\pi i + \frac{\pi}{4}i + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}}$

$z = e^{\frac{5\pi i}{4} - \frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}}.e^{\frac{5\pi i}{4}}$

Donde:

$|z| = e^{-\frac{\pi}{4}}$ y $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{4}$

Clave A

Resolución de problemas

32. $E = (M + N)(Mw + N)(Mw^2 + Nw^3)$

$= (M + N)(M^2w^3 + MNw^4 + MNw^2 + N^2w^3)$

$= (M + N)(M^2 + N^2 + MNw + MNw^2)$

$= (M + N)(M^2 + N^2 + MN(w + w^2))$

$= (M + N)(M^2 + N^2 - MN) = M^3 + N^3$

Clave A

33. $z(1 + i) = S + qi$ ...(1)

Dato:

$\sqrt{S^2 + q^2} = P\ \Rightarrow\ S^2 + q^2 = P^2$

$\Rightarrow\ q = \sqrt{P^2 - S^2}$ ...(2)

De (1): $z = \dfrac{S + qi}{1 + i}$ ...(3)

(2) en (3):

$z = \dfrac{S + (\sqrt{P^2 - S^2})i}{1+i}\left(\dfrac{1-i}{1-i}\right)$

$z = \dfrac{S - Si + (\sqrt{P^2 - S^2})i - (\sqrt{P^2 - S^2})i^2}{1 - i^2}$

$z = \dfrac{S + \sqrt{P^2 - S^2} + (\sqrt{P^2 - S^2} - S)i}{1 + 1}$

$z = \dfrac{1}{2}(S + \sqrt{P^2 - S^2} + (\sqrt{P^2 - S^2} - S)i)$

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 58)

1. [I] El MCD es xy^2.

[C] C Por definición.

[C] C Factorizamos:

$M(x) = (x-1)^3$
$N(x) = (x-1)^2$

$\Rightarrow$ Se observa que el MCM (M; N) es $(x-1)^3$.

Clave D

2. $M = \dfrac{\sqrt{9+2\sqrt{18}} - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$

Usamos radicales dobles:

$\sqrt{9+2\sqrt{18}} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$
$\underbrace{\;}_{6+3}\quad \underbrace{\;}_{6\times 3}$

Reemplazando en M:

$M = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$

Clave B

3. Por radicales dobles:

$\sqrt{7}+3 = \sqrt{7}+\sqrt{9} = \sqrt{9+7+2\sqrt{9.7}}$
$= \sqrt{16+2\sqrt{63}}$

Clave C

4. Sabemos:

$i^5 = i \Rightarrow \sqrt[5]{i} = i$

Reemplazamos:

$P = \sqrt{i - \sqrt{i+i}}$

Sabemos: $(1+i)^2 = 2i$, luego:

$P = \sqrt{i-\sqrt{2i}}$
$P = \sqrt{i-(1+i)} = \sqrt{-1} = i$

Clave C

5. $x^n = x^{n-3}\,.\,x^{n+4}$
$x^{n-1} = x^{n-3}\,.\,x^2$
$x^{n-2} = x^{n-3}\,.\,x$
$x^{n-3} = x^{n-3} \Rightarrow \text{MCD} = x^{n-3}$

Clave D

6. $(1+i)^2 = 2i$

$z^6 = (1+i)^6 = ((1+i)^2)^3$
$(2i)^3 = 8\,i^3 = 8(-i)$
$\therefore\; z^6 = -8i$

Clave E

7. $x^2 + 3xy + 2x + 2y^2 + 3y + 1$

x   2y   1   x . 1 +
x   y   1   x . 1
                  2x

$\Rightarrow (x+2y+1)(x+y+1)$

Clave B

8. $x^4 - 10x^2 + 9$
$x^2 \quad -9$
$x^2 \quad -1$

$\Rightarrow P(x) = (x^2-9)(x^2-1)$
$P(x) = (x-3)(x+3)(x+1)(x-1)$

$\therefore$ P(x) posee 4 factores primos.

Clave D

9. $R = \dfrac{P(x^3 - 3x^2P + 3P^2x - P^3)}{x(x-P)^3}$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2P + 3P^2x - P^3$ proviene de $(x-P)^3$

Reemplazamos:

$R = \dfrac{P(x-P)^3}{x(x-P)^3} = \dfrac{P}{x}$

Clave C

10. $S = \underbrace{\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\ddots}}}}_{P} - \sqrt{2} + 1$

$\Rightarrow P = \dfrac{1}{2+P}$

$2P + P^2 = 1$
$P^2 + 2P - 1 = 0$
$P = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Como P es positivo $\Rightarrow P = \sqrt{2} - 1$
$S = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 1 = 0$

Clave C

11. $|Z| = |\bar{Z}| = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$

Nos piden:

$M = |Z| + |\bar{Z}| = 25 + 25$
$\therefore\; M = 50$

Clave C

Unidad 3

ECUACIONES DE 1.er GRADO
PLANTEO DE ECUACIONES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 63) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

2. I. (V)

Desarrollando la ecuación:

$(x+3)(2x+5)+30=2(x+3)(x+5)$

$2x^2+11x+15+30=2(x^2+8x+15)$

$2x^2+11x+45=2x^2+16x+30$

$45-30=16x-11x$

$15=5x$

$x=3$

$\Rightarrow$ CS = {3}

II. (F)

Observamos que la ecuación es compatible determinada, por consiguiente esta proposición es falsa.

III. (F)

Clave C

Razonamiento y demostración

3. $\dfrac{2x+2}{15}=\dfrac{3x-18}{12}$

$24x+24=45x-270$

$21x=294$

$x=14$

Clave E

4. $\dfrac{x-3}{2}=2-\dfrac{x-2}{3} \Rightarrow \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{6-x+2}{3}$

$3(x-3)=2(8-x)$

$3x-9=16-2x$

$5x=25 \quad \therefore x=5$

Clave E

5. $3(2x+1)+5(x-2)=3x+41$

$6x+3+5x-10=3x+41$

$11x-7=3x+41$

$8x=48$

$x=6$

Clave B

6. Resolviendo:

$4+2(x+3)=3(x-3)-6$

$4+2x+6=3x-9-6$

$2x+10=3x-15$

$x=25$

CS = {25}

Clave E

7. Resolviendo:

$3(x+2)+1=4(x+1)+8-4x$

$3x+7=4x+4+8-4x$

$3x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{3}$

CS = {5/3}

Clave E

8. Resolviendo:

$20x=16(x+7)$

$5x=4(x+7)$

$5x=4x+28 \Rightarrow x=28$

CS = {28}

Clave B

9. Resolviendo:

$200x+600(40-x)=18\,000$

$2x+6(40-x)=180$

$2x+240-6x=180$

$4x=60 \Rightarrow x=15$

CS = {15}

Clave A

Resolución de problemas

10. flores blancas: F + 13

flores amarillas: F

flores rojas: F + 13

$\Rightarrow$ F + F + 13 = 17

2F = 4

F = 2

$\therefore$ Flores rojas = F + 13 = 13 + 2 = 15

Clave A

11. 1 año: 12 meses

Gana: m por mes

Gasta: x por mes

Ahorra: (m − x) por mes.

Ahorro:

$\dfrac{12a \text{ meses}}{s}=\dfrac{1 \text{ mes}}{m-x}$

Resolviendo:

$\dfrac{m-x}{s}=\dfrac{1}{12a}$

$x=m-\dfrac{s}{12a}$ (gasto mensual)

Clave C

12. $\overline{x(x+1)}=?$

$x+(x+1)=9$

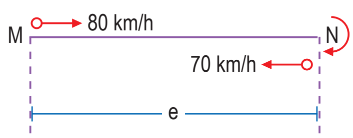
$2x+1=9$

$x=4$

$\therefore \overline{x(x+1)}=45$

Clave A

13.



$t_{M\to N}=\dfrac{e}{80}$, $t_{N\to M}=\dfrac{e}{70}$ El tiempo total empleado es: $\dfrac{e}{80}+\dfrac{e}{70}=6$

Desarrollando: e = 224 km.

Clave A

Nivel 2 (página 63) Unidad 3

Comunicación matemática

14. A) CONJUNTO – SOLUCIÓN

B) ENUNCIADO – ABIERTO

C) INCONSISTENTE

D) DETERMINADA

E) INDETERMINADA

15. VFF

Clave E

Razonamiento y demostración

16. Resolviendo:

$7(2x-4)-13(x-2)=8$

$14x-28-13x+26=8$

$x=10$

CS = {10}

Clave C

17. Resolviendo:

$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{x-1}{2}}{\frac{1}{4}}$

$\dfrac{2\times 6}{3}=\dfrac{4(x-1)}{2}$

$4=2(x-1) \Rightarrow x=3 \qquad$ CS = {3}

Clave A

18. Resolviendo

$a(a-x)=b(b-x)$

$a^2-ax=b^2-bx$

$ax-bx=a^2-b^2$

$x(a-b)=(a+b)(a-b);\ a\neq b$

$x=a+b$

CS = {a + b}

Clave C

19. Resolviendo:

$\dfrac{7x}{3}-\dfrac{5x}{2}=8+4$

$\dfrac{14x-15x}{6}=12$

$-x=72 \Rightarrow x=-72$

CS = {−72}

Por lo tanto, la ecuación es compatible determinada.

Clave E

20. Resolviendo:

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b}=a+b$

$bx+ax=ab(a+b)$

$x(a+b)=ab(a+b) \Rightarrow x=ab$

CS = {ab}

Clave D

21. Del enunciado:

$-6x-21-5x+6-8+16x-x+3=0$

Resolviendo:

$4x-20=0$

$4x=20 \qquad \therefore x=5$

Clave D

22. $x-\dfrac{x}{6}-\dfrac{x}{12}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{7}=9$

Resolviendo:

$\dfrac{12x-2x-x-6x}{12}-\dfrac{x}{7}=9 \Rightarrow \dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{7}=9$

$$\frac{7x-4x}{28}=9 \Rightarrow 3x=9\,.\,28$$
$$x=84$$

Clave A

Resolución de problemas

23. 1 año = 12 meses

Precio de la moto: M

$$\frac{12}{1000+M}=\frac{7}{200+M}\quad \text{(n° de meses es proporcional a la ganancia)}$$

$$12(200+M)=7(1000+M)$$
$$2400+12M=7000+7M$$
$$5M=4600 \Rightarrow M=920$$

∴ El valor de la moto es de \$920.

Clave C

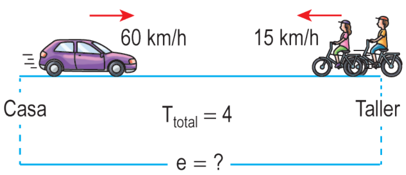
24. $\overline{(15-x)x}=?$

- Del enunciado

$$\overline{x(15-x)}=\overline{(15-x))x}-27$$
$$10x+15-x=10(15-x)+x-27$$
$$18x=108$$
$$x=6$$
$$\overline{(15-x)x}=96$$

Clave E

25.



- El espacio recorrido es el mismo para cada caso: $60\,t=15(4-t) \Rightarrow t=\frac{4}{5}h$
  (t: tiempo que demoran con el auto)
- Nos piden: $e=60\left(\frac{4}{5}\right)=48$ km

Clave D

Nivel 3 (página 64) Unidad 3

Comunicación matemática

26. Las soluciones respectivas son:

I. $x=\frac{1}{2}$

II. $x=5$

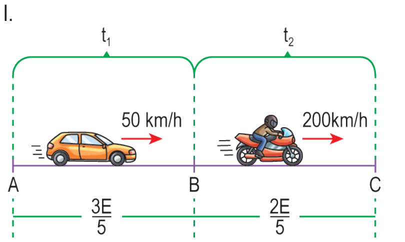
III. $x\in\{\}$

IV. $x=2$ (menor raíz par)

V. $x=72$

Clave D

27. I.



$$t_1+t_2=5h+36\,\text{min.}\left(\frac{1h}{60\,\text{min}}\right)=\left(5+\frac{3}{5}\right)h$$

$$t_1+t_2=\frac{28}{5}\left(t=\frac{e}{v}\right)$$

$$\frac{3E}{5}\left(\frac{1}{50}\right)+\frac{2E}{5}\left(\frac{1}{200}\right)=\frac{28}{5}$$

$$\frac{3E}{250}+\frac{E}{500}=\frac{28}{5}$$

II. Número de dos dígitos: $\overline{xu}$

decenas ↗ ↖ unidades

El dígito de las unidades:

$u=3x+1=2x+x+1$

$\Rightarrow$ el número será: $\overline{x(3x+1)}$

suma de cifras: $4x+1=9$

Razonamiento y demostración

28. Del enunciado:

$$x-5+x=3+2x-8$$
$$2x-5=2x-5$$
$$0x=0$$

Por lo tanto, la ecuación es compatible indeterminada.

Clave D

29. $(x+a)(x-b)-(x+b)(x-2a)=b(a-2)+3a$

$$x^2-xb+ax-ab-(x^2-2ax+bx-2ab)=ba-2b+3a$$
$$x^2-xb+ax-ab-x^2+2ax-bx+2ab=ba-2b+3a$$
$$3ax-2xb-ab+2ab=ba-2b+3a$$
$$(3a-2b)x=-2b+3a$$
$$x=\frac{3a-2b}{3a-2b}$$
$$x=1$$

Clave A

30. $(3x+2)^2+(2x-3)^2=(3x-5)^2+(2x-1)^2$

$$9x^2+12x+4+4x^2-12x+9=9x^2-30x+25+(4x^2-4x+1)$$
$$13x^2+13=13x^2-34x+26$$
$$34x=26-13$$
$$x=\frac{13}{34}$$

Clave E

31. $\frac{x}{a}-\frac{x}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

$$\frac{x(a+b)-xa}{a(a+b)}=\frac{1}{a+b}$$

$$xa+xb-xa=a \Rightarrow x=\frac{a}{b}$$

Clave C

32. $(2x+3)^2+(2x+1)^2=(2x-3)^2+(2x-4)^2$

$$4x^2+12x+9+4x^2+4x+1=4x^2-12x+9+4x^2-16x+16$$
$$8x^2+16x+10=8x^2-28x+25$$
$$16x+28x=25-10$$
$$44x=15$$
$$x=\frac{15}{44}$$

Clave A

33. $3m+4x+2=5mx$

$$4x-5mx=-2-3m$$
$$x(4-5m)=-(2+3m)$$
$$x=-\frac{(2+3m)}{4-5m}$$

Dato: es incompatible.

Se cumple:

$4-5m=0 \quad \wedge \quad 2+3m\neq 0$

$m=\frac{4}{5} \quad \wedge \quad m\neq-\frac{2}{3}$

Clave B

34. $\frac{a+b+x}{a-b+x}-\frac{a-b-x}{a+b-x}=\frac{-4ab}{x^2}$

$$\frac{(a+b)^2-x^2-[(a-b)^2-x^2]}{a^2-(b-x)^2}=\frac{-4ab}{x^2}$$

$$\frac{4ab}{a^2-(b-x)^2}=-\frac{4ab}{x^2}$$

$$a^2=(b-x)^2-x^2$$
$$a^2=b^2-2bx$$
$$x=\frac{b^2-a^2}{2b}$$

Clave D

Resolución de problemas

35. Hombres: $m+12$

Mujeres: m

Niños: $\underbrace{(m+12+m)}_{\text{hombres más mujeres}}-33$

Total de personas:

$$m+12+m+(2m+12)-33=63$$
$$2m+12+2m+12=96$$
$$4m=72 \Rightarrow m=18$$

n.° niños:

$=(2m+12)-33=2(18)+12-33=15$

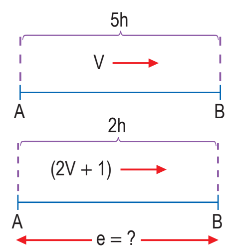
Clave A

36. Sea x el dígito de las decenas:

$$\overline{x(3x-2)}=?$$
$$\overline{(3x-2)x}=\overline{x(3x-2)}+18$$
$$10(3x-2)+x=10x+(3x-2)+18$$
$$30x-20+x=13x+16$$
$$31x-20=13x+16$$
$$31x-13x=20+16$$
$$18x=36$$
$$x=2$$
$$\overline{x(3x-2)}=24$$

Clave A

37.



V y **(2V + 1)** estan en km/h

e debe estar en km

Como se trata de un mismo espacio:

$5V=2(2V+1) \Rightarrow 5V=4V+2$

$V=2$ km/h

$e=5V=5(2)=10$ km $\Rightarrow$ $e=10\,000$ m

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 68) Unidad 3

Comunicación matemática

1. Del enunciado: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Entonces: $|A| = 2 \wedge |B| = 3$ ...(1)
Por dato: $AX = B$
$|AX| = |B|$
$|A||X| = |B|$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $2|X| = 3$ $\therefore |X| = \frac{3}{2}$

Clave B

2. $A = [a_{ij}]_{3\times3} \wedge a_{ij} = \begin{cases} 3\,;\, i = j \\ 2\,;\, i \neq j \end{cases}$

Luego:
$a_{11} = 3; a_{12} = 2; a_{13} = 2$
$a_{21} = 2; a_{22} = 3; a_{23} = 2$
$a_{31} = 2; a_{32} = 2; a_{33} = 3$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, la suma de elementos de la matriz A es: 21

Clave E

Razonamiento y demostración

3. Por dato:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Piden: A^T

$\therefore A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Clave B

4. $A + B = C$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$

$\Rightarrow m = 5; n = 4; p = 1; q = 3$

Se pide: $E = \frac{mq}{n+p} = \frac{(5)(3)}{4+1} = 3$

Clave C

5. $3(X - A) = X - 2B$

$2X = 3A - 2B$

$X = \frac{3}{2}A - B \Rightarrow X = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\therefore X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Clave A

6. $3A - 12I = 3\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

Clave B

7. Por dato: $|A| = 2 \wedge |B| = 5$

Piden: $|A^TB^2| = |A^T||B^2| \Rightarrow |A^TB^2| = |A||B||B|$

$\therefore |A^TB^2| = 2\,.\,5\,.\,5 = 50$

Clave D

8. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces: $A^T = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Luego: $A^TA = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^TA = \begin{pmatrix} 113 & 30 \\ 30 & 8 \end{pmatrix}$

$\therefore$ Traz $(A^TA) = 113 + 8 = 121$

Clave D

9. Como la matriz:

$\begin{bmatrix} a+b & a+6 & b+9 \\ a-b & 2a & a+b+15 \\ 2a-b & 4b & 7a \end{bmatrix}$ es triangular inferior, entonces:

$a + 6 = 0 \Rightarrow a = -6$
$b + 9 = 0 \Rightarrow b = -9$ $\therefore a - b = -6 - (-9) = 3$

Clave C

10. $2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2A - I = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

Clave C

Resolución de problemas

11. $E = \text{Det}(A + A^2)\text{Det}(B + B^2)$

Nos piden:
$E = \text{Det}(A + A^2)\,.\,\text{Det}(B + B^2)$
$E = \text{Det}A(I + A)\,.\,\text{Det}B(I + B)$
$E = \text{Det}A\text{Det}(I + A)\,.\,\text{Det}B\text{Det}(I + B)$ ...(1)

Dato: $AB = 0 \Rightarrow \text{Det}(AB) = 0$
$\text{Det}(A)\text{Det}(B) = 0$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $E = 0$

Clave D

12. Nos dicen:
$AB = BA$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2a-c & -3 \\ 3a+c & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3 & 1-a \\ 2c+15 & 5-c \end{pmatrix}$

Por igualdad de matrices
$a = 4; c = -3$
$\Rightarrow a + c = 4 + (-3) = 1$

Clave C

Nivel 2 (página 69) Unidad 3

Comunicación matemática

13. Del enunciado:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{4\times3}$ $\therefore \sum$ elementos de A es: -3

Clave C

14. Resolución

Q	K	Z	P	C	O	L	U	M	J	N	A	F	X
J	F	I	L	A	R	X	S	Z	A	L	H	G	A
H	Y	R	S	R	T	A	N	M	U	L	O	C	Y
C	E	T	A	Q	I	X	H	N	I	P	W	I	B
U	E	A	P	L	C	N	U	L	M	X	H	J	E
A	S	M	C	A	U	A	Y	B	D	E	S	C	A
D	B	R	W	N	F	G	D	K	A	G	B	E	G
R	C	E	Y	O	K	X	N	F	D	J	I	S	H
A	A	C	L	G	H	J	M	A	I	Y	W	C	Z
W	E	T	Z	A	M	V	P	I	T	E	J	A	Y
J	L	A	F	I	L	O	S	D	N	C	K	L	R
X	A	N	K	D	C	U	V	E	E	Z	E	A	T
Y	R	D	I	A	G	X	A	N	D	T	W	R	A
A	D	A	R	D	A	U	C	T	I	D	Z	S	M

Razonamiento y demostración

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Luego: $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sum$ elementos$= -6$

Clave D

16. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3B^T = \begin{pmatrix} 15 & 21 \\ -27 & 12 \end{pmatrix}$

Piden:

$A^T + 3B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 21 \\ -27 & 12 \end{pmatrix}$

$A^T + 3B^T = \begin{pmatrix} 17 & 25 \\ -22 & 11 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{Traz}(A^T + 3B^T) = 28$

Clave C

17. Sea:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & a \\ -2 & b \end{pmatrix}$

Dato: AB = BA

Reemplazamos:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & a \\ -2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & a \\ -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Multiplicamos:

$\begin{pmatrix} -1 & a+3b \\ 10 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2a & 15 \\ -2+2b & -6 \end{pmatrix}$

Igualando:

$10 = -2 + 2b \Rightarrow b = 6$

$2a = -6 \Rightarrow a = -3$

Nos piden: $ab = (6)(-3) = -18$

Clave E

18. Como la matriz:

$A = \begin{pmatrix} 4 & b-1 & a+2 \\ a-2 & 6 & d-1 \\ b+3 & d-4 & 7 \end{pmatrix}$

es triangular superior, entonces:

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$d - 4 = 0 \Rightarrow d = 4$

$b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3$

$\therefore a + b - d = -5$

Clave C

19. $A = \begin{pmatrix} m-3n & m \\ 1 & n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 6-n \\ 1 & 6-m \end{pmatrix}$

Por dato: A = B

Entonces:

$m - 3n = 2$ ...(1)

$n = 6 - m \Rightarrow n + m = 6$ ...(2)

De (1) y (2): $n = 1 \;\wedge\; m = 5$

$\therefore m - n = 4$

Clave A

Resolución de problemas

20. Examen de Admisión 2009–I (matemática)

Según el método de Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$-\; + \; - \; +$

$$-x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 \\ x & 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

$-abx - c(ab - (ax + bx)) = 0$

El valor solicitado será: $x = \dfrac{abc}{ab + bc + ac}$

Clave B

21. Examen de Admisión 2001–I (matemática)

Determinamos la matriz C^8:

$C^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \; C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \; C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

Determinamos la matriz D^9:

$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D^9 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nos piden:

$C^8D^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 73 \end{pmatrix}$

Clave A

Nivel 3 (página 69) Unidad 3

Comunicación matemática

22. Del enunciado:

$b_{11} = 1 - 1 = 0; b_{12} = 1 - 2 = -1;$

$b_{13} = 1 - 3 = -2; b_{21} = 2 + 1 = 3;$

$b_{22} = 2 - 2 = 0; b_{23} = 2 - 3 = -1$

$\therefore B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{2\times3}$

Clave C

23.
I. CUADRADA
II. ESCALAR
III. DIAGONAL
IV. IDENTIDAD
V. TRIANGULAR–SUPERIOR

Razonamiento y demostración

24. $F(x) = x^2 - 2x + 1$

$F(x) = (x-1)^2$

Entonces: $F(A) = (A - I)^2$

$F(A) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2$

$F(A) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2$

$F(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore \sum$ elementos de F(A) es: 4

Clave D

25. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Como nos piden: Traz(AB) $\times$ Traz(BA), solo calculamos los elementos de la diagonal de AB y BA.

Luego:

$AB = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Traz}(AB) = 0$

$\therefore \underbrace{\text{Traz}(AB)}_{0} . \text{Traz}(BA) = 0$

Clave A

26. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ c & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Dato:

(*) $\text{Traz}(A) = 2 + 3 + a = 7$

$a = 2$

(*) $1 \cdot 3 \cdot b = -3 \Rightarrow b = -1$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & b \\ c & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 10$$

$2(6-2) - 1(2c-2) - 1(c-3) = 0$

$8 - 2c + 2 - c + 3 = 10$

$3 = 3c \Rightarrow c = 1$

Nos piden:

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$|B| = 2(4+1) + 1(2-1) + 1(1+2)$

$|B| = 10 + 1 + 3 = 14$

Clave C

27. Por dato:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 22 & 9 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 & 57 \\ 38 & 11 \end{pmatrix}$$

Resolviendo: $|xI - (A^3 + A + I)| = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 106 & 57 \\ 38 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

Reduciendo:

$$\begin{vmatrix} x - 111 & -60 \\ -40 & x - 11 \end{vmatrix} = 0$$

$x^2 - 122x - 1179 = 0$

$x \qquad 9$

$x \qquad -131$

$x = -9 \lor x = 131$

$\therefore$ La menor solución es: -9

Clave A

28. Por dato:

A es de orden 3×3 y $|A| = 2$

Usamos $|\lambda A| = \lambda^n$; n: orden $|A|$

$\Rightarrow E = (|A|^2)^3 |A \cdot A^T|$

$\Rightarrow E = |A|^6 |A| \underbrace{|A^T|}_{|A|} = 2^6 \cdot 2 \cdot 2$

$\therefore E = 2^8 = 256$

Clave D

29. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & 8 & 2 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -128$

Aplicando la regla de Sarrus:

$$-128 = \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ x & 8 & 2 & x & 8 \\ 4 & -7 & 5 & 4 & -7 \end{array}$$

Luego:

$-128 = 80 + 24 + (-35x) - 160 - (-28) - (15x)$

$-128 = -28 - 50x$

$50x = 100$

$\therefore x = 2$

Clave C

Resolución de problemas

30. $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{Traz}(A) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{3^1 + 1}{3^1}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{Traz}(A^2) = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{10}{9} = \frac{3^2 + 1}{3^2}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{27} & \frac{13}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{14}{27} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{Traz}(A^3) = \frac{14}{27} + \frac{14}{27} = \frac{28}{27} = \frac{3^3 + 1}{3^3}$

Generalizando:

$\Rightarrow \text{Traz}(A^n) = \frac{3^n + 1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3^n}$

Cuando: $n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{3^n} \approx 0$

$\therefore \text{Traz}(A^n) \approx 1$

Clave B

31. Examen de Admisión UNI 2001–II (matemática)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ a_n & n & 1 \end{pmatrix}$$

$a_n = ?$

$1; 3; 6; 10; \ldots a_n$

$3 = 1 + 2;\ 6 = 1 + 2 + 3;\ 10 = 1 + 2 + 3 + 4$

$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Para $n = 49 \Rightarrow a_{49} = 1225$

$$\therefore a^{49} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 \\ 1225 & 49 & 1 \end{pmatrix}$$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 73) Unidad 3

Comunicación matemática

1. Del sistema:

$x + y + z = 4$ ...(I)
$2x - 3y + 5z = 7$ ...(II)
$6x + y + 9z = 21$ ...(III)

Multiplicamos por 2 a (I) y le restamos (II):
$5y - 3z = 1$ ...(α)

Multiplicamos por 6 a (I) y le restamos (III):
$5y - 3z = 3$ ...(β)

$\therefore$ De (α) y (β) se deduce que el sistema no tiene solución.

Clave D

2. El valor de **y** es 2.

Razonamiento y demostración

3. $\dfrac{n+5}{7} = \dfrac{5}{n+3} \neq 1/3 \Rightarrow (n+5)(n+3) = 35$

$n^2 + 8n + 15 = 35$
$n^2 + 8n - 20 = 0$

n ⤫ 10
n ⤫ –2

$\Rightarrow n = 2 \vee n = -10$
Pero $n \in \mathbb{Z}^+$: $\therefore n = 2$

Clave E

4. El sistema:

$(n + 11)x + (n + 16)y = 31$
$(n + 15)x + (n + 19)y = 91$

Es inconsistente:

$\Rightarrow$ se cumple: $\dfrac{n+11}{n+15} = \dfrac{n+16}{n+19} \neq \dfrac{31}{91}$

$n^2 + 30n + 209 = n^2 + 31n + 240$

$\therefore n = -31$

Clave D

5. Resolvemos:

$x + 2y = 13$ ...(I)
$x - 2y = -7$ ...(II)

Sumamos (I) y (II):
$2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Reemplazamos en (I):
$3 + 2y = 13 \Rightarrow y = 5$

Nos piden: $x + y = 8$

Clave D

6. Resolvemos:

$7x - 4y = 12$ ...(I)
$5x - 3y = 6$ ...(II)

$\left.\begin{array}{l}(I) \times 3:\ 21x - 12y = 36 \\ (II) \times 4:\ 20x - 12y = 24\end{array}\right\} (-)$

$x = 12$

Reemplazamos en (I): $7(12) - 4y = 12 \Rightarrow y = 18$

Nos piden: $y - x = 18 - 12 = 6$

Clave A

7. Resolvemos:

$37x + 13y = 137$ ... (I)
$13x + 37y = 113$ ... (II)

Sumamos las ecuaciones:
$50x + 50y = 250$
$\therefore x + y = 5$

Clave A

8. Resolvemos:

$(x + 2)(y + 2) = 6 + 2\sqrt{2}$
$4 + 2(x + y) + xy = 6 + 2\sqrt{2}$ ... (I)
$(2 - x)(2 - y) = 2 + 6\sqrt{2}$
$4 - 2(x + y) + xy = 2 + 6\sqrt{2}$ ... (II)

Sumamos (I) y (II):
$8 + 2xy = 8 + 8\sqrt{2}$
$2xy = 8\sqrt{2} \Rightarrow xy = 4\sqrt{2}$

Clave C

Resolución de problemas

9. Examen de Admisión UNI 2007-II (matemática)

Numeramos cada ecuación:

$\dfrac{4}{x+y-1} - \dfrac{5}{2x-y+3} = -\dfrac{5}{2}$ ...(1)

$\dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{1}{2x-y+3} = -\dfrac{7}{5}$ ...(2)

5(2) + (1):

$\dfrac{19}{x+y-1} = -7 - \dfrac{5}{2}$

$x + y = -1$

Clave A

10. Según como nos dice el enunciado:

$S + g = 2000$

$\dfrac{S}{g} = \dfrac{2}{3}$; donde S: sueldo y g: gasto

$\Rightarrow g = 1200 \wedge S = 800$

Para: $\dfrac{S'}{g} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \dfrac{S'}{1200} = \dfrac{4}{5}$

$S' = 960 \wedge S' - S = 160$

Clave D

Nivel 2 (página 73) Unidad 3

Comunicación matemática

11. SOLUCIONES
ÚNICAS
REDUCCIÓN
SUSTITUCIÓN
IGUALDAD
GAUSS
CONJUNTO
ECUACIONES
RESOLUCIÓN

12. I. Correcto (C)

Si el sistema es compatible indeterminado:

$\dfrac{\frac{2b-1}{2}}{3a+1} = \dfrac{b-3}{2} = \dfrac{1}{2}$

(B) relaciona el primer y el tercer término; (A) relaciona el segundo y el tercer término.

De (A): $\dfrac{b-3}{\cancel{2}} = \dfrac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow b = 4$

De (B): $\dfrac{\frac{2b-1}{2}}{3a+1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow a^b = 2^4 = 16$

II. Incorrecto (I)

$x = y$

$\Rightarrow 13x - nx = 17$
$7x + nx = 51$ (+)

$\Rightarrow x = \dfrac{17}{5} \Rightarrow n = 8$

III. Correcto (C)

$x = 3 \wedge y = 2$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3a - 2b = 4 \\ 3a + 2b\ (2) = 10\end{array}\right\}\begin{array}{l}3a - 2b = 4 \text{ ...(1)} \\ 3a + 4b = 10 \text{ ...(2)}\end{array}$

(2) + 2(1): $6a - 4b = 8$
$3a + 4b = 10$ (+)
$a = 2$

En (1):
$3(2) - 4 = 2b \Rightarrow b = 1$

Luego:
$a^b = 2^1 = 2$

Razonamiento y demostración

13. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = 6$ ...(1)

$\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 7$ ...(2)

Multiplicamos por 12 a (1) y (2):

$4x + 2y = 72$ ...(3)
$3x + 4y = 84$ ...(4)

Multiplicamos por 3 a (3) y por 4 a (4):

$12x + 6y = 216$
$12x + 16y = 336$ (–)
$-10y = -120$
$\Rightarrow y = 12$

Evaluamos y = 12 en (3):

$4x + 2(12) = 72$
$4x = 48$
$\Rightarrow x = 12$

$\therefore (x)^2 + 1 = (12)^2 + 1 = 145$

Clave E

14. $\frac{n}{2} = \frac{-6}{n-7} \neq \frac{5n-3}{29-7n}$

De: $\frac{n}{2} = \frac{-6}{n-7}$

$n^2 - 7n = -12$

$n^2 - 7n + 12 = 0$

$(n-4)(n-3) = 0 \Rightarrow n = 4 \vee n = 3$ ... (1)

De: $\frac{n}{2} \neq \frac{5n-3}{29-7n}$

$29n - 7n^2 \neq 10n - 6$

$0 \neq 7n^2 - 19n - 6$

$0 \neq (7n+2)(n-3)$

$\Rightarrow n \neq -\frac{2}{7} \wedge n \neq 3$ ...(2)

$\Rightarrow$ De (1) y (2): $n = 4$

Clave D

15. Por dato:

$CS = \{(x; y)\} = \{(3; -1)\}$

$\Rightarrow x = 3 \wedge y = -1$

En el sistema:

$(a + b)x + (a - b)y = 10$

$(2a - b)x + (2a + 3b)y = 12$

Reemplazando se tiene:

$a + 2b = 5$ ...(I)

$2a - 3b = 6$ ...(II)

Resolvemos (I) y (II): $a = \frac{27}{7} \wedge b = \frac{4}{7}$

Nos piden: $a + b = \frac{27}{7} + \frac{4}{7} = \frac{31}{7}$

Clave C

16. Se debe cumplir:

$\frac{m+3}{m+4} = \frac{2m}{3m-2} \neq \frac{5m-9}{2m+1}$

De la igualdad:

$3m^2 + 7m - 6 = 2m^2 + 8m$

$m^2 - m = 6$

$m(m-1) = 6$

$m = 3 \vee m = -2$

Si $m = 3 \Rightarrow \frac{6}{7} = \frac{6}{7} \neq \frac{6}{7}$

No cumple con la condición.

Si $m = -2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-19}{-3}$

Si cumple con la condición: $\therefore m = -2$

Clave C

17. Resolvemos:

$a(x + y) - b(x - y) = 2a$

$a(x - y) - b(x + y) = 2b$

Restando tenemos:

$a(x+y) + b(x+y) - b(x-y) - a(x-y) = 2(a-b)$

$(a+b)(x+y) - (a+b)(x-y) = 2(a-b)$

$(a+b)(2y) = 2(a-b)$

$y = \frac{a-b}{a+b}$

Clave D

18. $3x + (m - 1)y = 12$

$(m + 6)x + 6y = m$

Si es inconsistente, se cumple:

$\frac{3}{m+6} = \frac{m-1}{6} \neq \frac{12}{m} \Rightarrow \frac{3}{m+6} = \frac{m-1}{6}$

$18 = (m - 1)(m + 6)$

$m^2 + 5m - 6 = 18$

$m^2 + 5m - 24 = 0$

m   8
m   –3

$m = -8 \vee m = 3$

Si $m = -8 \Rightarrow \frac{-3}{2} = \frac{-3}{2} = \frac{-3}{2}$

No cumple la condición:

Si $m = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq 4$

Sí cumple con la condición:

$\therefore m = 3$

Clave C

Resolución de problemas

19. El sistema:

$3mx + 6y = 2$ ...(1)

$2x + my = 1$ ...(2)

De (1) y (2) tenemos:

- $x = \frac{2-6y}{3m} = \frac{1-my}{2} \Rightarrow y = \frac{3m-4}{3m^2-12}$
- $y = \frac{2-3mx}{6} = \frac{1-2x}{m} \Rightarrow x = \frac{2m-6}{3m^2-12}$

Por condición tenemos: $y \leq x - 1$

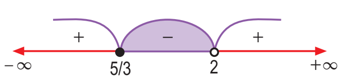
Reemplazamos: $\frac{3m-4}{3m^2-12} \leq \frac{2m-6}{3m^2-12} - 1$

Luego: $\frac{3m^2+m-10}{3(m^2-4)} \leq 0 \Rightarrow m^2 - 4 \neq 0$

$\frac{(3m-5)(m+2)}{(m+2)(m-2)} \leq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$

$\frac{3m-5}{m-2} \leq 0 \wedge m \neq \pm 2$

Resolvemos:



$\therefore m \in \left[\frac{5}{3}; 2\right\rangle$

Clave B

20. Sean:

x: número de estudiantes

y: número de soles que paga c/u

Se le pagó al profesor:

$xy = (x + 10)(y - 10) = (x - 2)(y + 5)$

$\left.\begin{array}{l} y - x = 10 \\ 5x - 2y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 20 \end{array}$

$\Rightarrow xy = 200$

Clave B

Nivel 3 (página 74) Unidad 3

Comunicación matemática

21. Sumamos las ecuaciones dadas:

$2x - y + z = 1$

$x + 4y + 2z = -1$ (+)

$3x + 3y + 3z = 0$ ...(1)

Restamos las ecuaciones dadas:

$2x - y + z = 1$

$x + 4y + 2z = -1$ (–)

$x - 5y - z = 2$ ... (2)

Multiplicamos por 2 a la primera ecuación y sumamos con la segunda ecuación

$4x - 2y + 2z = 2$

$x + 4y + 2z = -1$ (+)

$5x + 2y + 4z = 1$ ...(3)

Las ecuaciones (1); (2) y (3) son equivalentes a las primeras. Para el problema indicaremos que (I) y (III) coinciden con (2) y con (3), sin embargo (II) no coinciden con (1).

Clave C

22.

SU	S	TITUCIÓN
SOLUC	I	ON
EXPRE	S	IONES
INCOGNI	T	AS
LIN	E	ALES
CO	M	PATIBLE
ECU	A	CIONES

Razonamiento y demostración

23. $mx - 6y = 5m - 3$

$2x + (m - 7)y = 29 - 7m$

Incompatible: $\frac{m}{2} = \frac{-6}{m-7}$

$m^2 - 7m + 12 = 0$

m   – 4
m   – 3

$(m - 4)(m - 3) = 0$

$m = 4 \vee m = 3$ ...(α)

$\frac{-6}{m-7} \neq \frac{5m-3}{29-7m}$

$-174 + 42m \neq 5m^2 - 35m - 3m + 21$

$5m^2 - 80m + 195 \neq 0$

$m^2 - 16m + 39 \neq 0$

m   –13
m   – 3

$(m - 13)(m - 3) \neq 0$

$m \neq 13 \wedge m \neq 3$ ...(β)

De (α) y (β): $\therefore m = 4$

Clave A

24. Para que el sistema siguiente sea inconsistente:

$$\begin{cases}(a-2)x-(a+7)y=2a-1\\ 4x-(a+2)y=3a-14\end{cases}$$

Se debe cumplir:

$$\frac{a-2}{4}=\frac{-(a+7)}{-(a+2)}\neq\frac{2a-1}{3a-14}$$

Luego: $\frac{a-2}{4}=\frac{a+7}{a+2}$

$a^2-4=4a+28$

$a^2-4a-32=0$

a ⟍⟋ −8

a ⟋⟍ 4

$\Rightarrow a=8 \ \vee \ a=-4$ ...(1)

$$\frac{a-2}{4}\neq\frac{2a-1}{3a-14}$$

$3a^2-14a-6a+28\neq 8a-4$

$3a^2-20a+28\neq 8a-4$

$3a^2-28a+32\neq 0$

3a ⟍⟋ −4

a ⟋⟍ −8

$(3a-4)(a-8)\neq 0$

$\Rightarrow a\neq\frac{4}{3} \ \wedge \ a\neq 8$ ...(2)

De (1) y (2): $\therefore a=-4$

Clave A

25. $x+y=15$ ...(1)

$x-z=6$ ...(2)

$y-z=1$ ...(3)

De (2): $z=x-6$ de (3): $z=y-1$

Igualando ambas ecuaciones:

$x-6=y-1$

$x=y+5$

Reemplazando en (1):

$y+5+y=15 \Rightarrow y=5$

En (1) y (3):

$x=10 \ \wedge \ z=4 \ \therefore \ xyz=200$

Clave B

26. $2x-3y+8z=2\Rightarrow z=\frac{2-2x+3y}{8}$ ...(1)

$6x+9y-12z=3\Rightarrow z=\frac{6x+9y-3}{12}$ ...(2)

$4x+6y+4z=5\Rightarrow z=\frac{5-4x-6y}{4}$ ...(3)

Igualamos el valor de z de (1) y (2):

$$\frac{2-2x+3y}{8}=\frac{6x+9y-3}{12}$$

$6-6x+9y=12x+18y-6$

$12=18x+9y$

$4=6x+3y$ ...(4)

Igualando el valor de z de (1) y (3):

$$\frac{2-2x+3y}{8}=\frac{5-4x-6y}{4}$$

$2-2x+3y=10-8x-12y$

$6x+15y=8$ ...(5)

Tenemos el sistema formado por (4) y (5):

$$\begin{array}{r} 6x+15y=8 \\ 6x+3y=4 \\ \hline 12y=4 \end{array} \quad (-)$$

$\therefore y=\frac{1}{3}$

Clave C

27. Resolviendo:

$2^x.(1+2y)=20$ ... (I)

$2^{x+1}.(1-y)=-8$ ... (II)

Dividiendo (I) y (II):

$$\frac{2^x(1+2y)}{2^x.2(1-y)}=\frac{-20}{8}$$

$$\frac{1+2y}{1-y}=-5$$

$1+2y=5y-5\Rightarrow y=2$

Reemplazando en (I):

$2^x(1+2.2)=20\Rightarrow 2^x=4$

$\Rightarrow x=2$

Nos piden: $x^y=2^2=4$

Clave E

28. Del sistema:

$x+my=1$

$mx-3my=2m+3$

Si no tiene solución se cumple:

$$\frac{1}{m}=\frac{m}{-3m}\neq\frac{1}{2m+3}$$

$-3m-m^2=0$

$\Rightarrow m(m+3)=0$

$m=0 \ \vee \ m=-3$

Como:

$$\frac{m}{-3m}\neq\frac{1}{2m+3}$$

$2m+3\neq -3$

$m\neq -3$ $\therefore m=0$

Clave B

Resolución de problemas

29. Sea:

Espacio recorrido por la primera persona: e_1

Espacio recorrido por la segunda persona: e_2

Del enunciado:

$e_1=(5e_2+2)$ km ...(1)

$e_1=e_1+e_2-5(4)-5(4)$ ...(2)

De (2): $e_2=40$ km ...(3)

(3) en (1): $e_1=5(40)+2=200+2$

$e_1=202$ km ...(4)

- Nos piden:

  $e_1+e_2=(202+40)=242$ km

Clave D

30. Veamos:

Al llegar el automóvil a la ciudad B, lo hace con g galones de b octanos (por viajar desde la ciudad A). Luego llena el tanque con x galones. de a octanos e y galones de d octanos.

Donde: $g+x+y=G$

Este total de G galones debe ser de c octanos (dato del problema).

$$\Rightarrow \frac{gb+xa+yd}{G}=c$$

- Operamos:

  $gb+xa+yd=cG$

  $gb+xa+\underbrace{(G-x-g)}_{y}d=cG$

- Despejamos:

  $$x=\frac{(d-c)G-(d-b)g}{d-a}$$

- Calculamos y:

  $y=G-x-g$

  $$y=G-g-\frac{(d-c)G-(d-b)g}{d-a}$$

  $$y=\frac{G(c-a)-g(b-a)}{d-a}$$

  $$y=\frac{(c-a)G-(b-a)g}{d-a}$$

Clave E

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 78) Unidad 3
Comunicación matemática

1.

2. Por teoría:

Si: $b^2 - 4ac > 0$ (V)

$\Rightarrow$ La ecuación tiene 2 soluciones.

Si: $b^2 - 4ac = 0$ (F)

$\Rightarrow$ La ecuación tiene una solución doble.

Si: $b^2 - 4ac < 0$ (F)

$\Rightarrow$ La ecuación no tiene solución en los reales.

Clave E

3. De las ecuaciones:

I. $x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$. Tiene raíces imaginarias.

II. $x^2 + 5x + 3 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4(1)(3) = 13 > 0$. Tiene raíces reales.

III. $x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$. Tiene raíces imaginarias.

$\therefore$ Las ecuaciones I y III tienen raíces imaginarias.

Clave E

Razonamiento y demostración

4. $r + s = \dfrac{-p}{1} = -p$ $\qquad r\,.\,s = \dfrac{36}{1} = 36$

Del dato: $\dfrac{s+r}{r.s} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow \dfrac{-p}{36} = \dfrac{5}{12}$ $\qquad \therefore p = -15$

Clave E

5. Sabemos que:

$x_1 + x_2 = \dfrac{m+8}{m+1} = \dfrac{9}{2}$

$2m + 16 = 9m + 9 \Rightarrow 7 = 7m$ $\qquad \therefore\ m = 1$

Clave B

6. $3x^2 - (5\lambda - 2)x + 8 = 0$

Dato: $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{5\lambda - 2}{3} = 6$

$5\lambda - 2 = 18 \Rightarrow \lambda = 4$

Clave B

7. De la ecuación:

$3 + 2x^2 - 3x = 7 + 6x \Rightarrow 2x^2 - 9x - 4 = 0$

Nos piden: $x_1x_2 = \dfrac{-4}{2} = -2$

Clave E

8. $\alpha + \beta = 1 \wedge \alpha\,.\,\beta = 1$

$$(\alpha^\beta + \beta^\alpha)(\alpha^\alpha + \beta^\beta) = \alpha^{\beta+\alpha} + \alpha^\beta\,.\,\beta^\beta + \beta^\alpha\alpha^\alpha + \beta^{\alpha+\beta}$$
$$= \alpha + (\alpha\,.\,\beta)^\beta + (\beta\,.\,\alpha)^\alpha + \beta$$
$$= \underbrace{\alpha + \beta} + 1^\beta + 1^\alpha$$
$$= 1 + 1 + 1$$
$$= 3$$

Clave C

9. $\Delta = (-18)^2 - 4(3)(27) \Rightarrow \Delta = 324 - 324 \Rightarrow \Delta = 0$

Por lo tanto, tiene raíces reales e iguales.

Clave A

Resolución de problemas

10. De la ecuación: $mx^2 + nx + p = 0$

Dato: $x_1 = 2x_2$

Sabemos que: $\underbrace{x_1}_{2x_2} + x_2 = -\dfrac{n}{m}$

$3x_2 = -\dfrac{n}{m} \Rightarrow x_2 = \dfrac{-n}{3m}$ $\qquad$ ...(I)

Además:

$\underbrace{x_1x_2}_{2(x_2)^2} = \dfrac{p}{m} \Rightarrow (x_2)^2 = \dfrac{p}{2m}$ $\qquad$ ...(II)

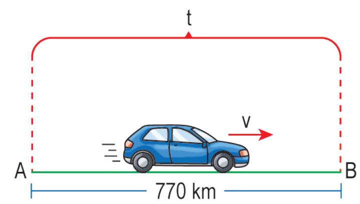
$(I)^2 = (II)$

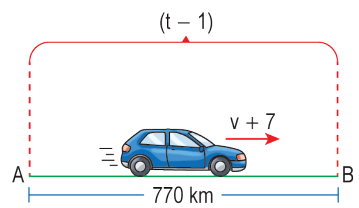
$\left(\dfrac{-n}{3m}\right)^2 = \dfrac{p}{2m} \Rightarrow \dfrac{n^2}{9m^2} = \dfrac{p}{2m} \Rightarrow 2n^2 = 9pm$

Clave C

11. Sea t(h): tiempo en que recorre 770 km.

$v\left(\dfrac{km}{h}\right)$: velocidad que emplea en recorrer 770 km.





Los espacios recorridos son los mismos:

$vt = (v + 7)(t - 1)$

$v = 7(t - 1)$ $\qquad$ ...(1)

Del primer gráfico: $vt = 770$ $\qquad$ ...(2)

(1) en (2): $\cancel{7}(t - 1)t = \overset{110}{\cancel{770}}$

$t^2 - t - 110 = 0$

$t \quad -11$

$t \quad +10$

$(t - 11)(t + 10) = 0$

$t = 11$ $\qquad$ ...(3)

(3) en (1): $v = 7(11 - 1) = 70$ km/h

Nos piden el tiempo que demoraría si su nueva velocidad disminuye en 18 km/h

$v - 18 = 70 - 18 = 52$ km/h $\Rightarrow 770\text{ km} = \left(52\dfrac{km}{h}\right)t$

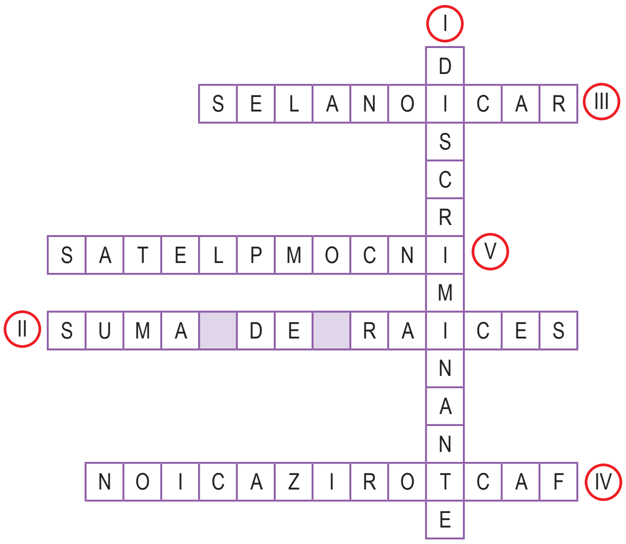
$t = \dfrac{770}{52} = 14{,}8$ h

Clave D

Nivel 2 (página 78) Unidad 3

Comunicación matemática

12.



13. Respuesta: VFVF

Razonamiento y demostración

14. De la ecuación: $(2m - 5)x^2 - (t - 6)x - (7 - m) = 0$

Sabemos que: $x_1x_2 = -\dfrac{(7-m)}{2m-5} = 1 \Rightarrow m - 7 = 2m - 5 \Rightarrow m = -2$

Clave B

15. $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0$

$x = 0 \ \vee \ x - 2 = 0$

$x = 0 \ \vee \ x = 2 \qquad CS = \{0; 2\}$

Clave C

16. $6x^2 + x - \lambda = 1$

Como (-3) es una raíz de la ecuación debe cumplir con la igualdad.

$6(-3)^2 + (-3) - \lambda = 1$

$6(9) - 3 - \lambda = 1$

$54 - 4 = \lambda$

$\lambda = 50$

Clave A

17. $3x^2 + 6x + \lambda = 0$

Como (-2) es una raíz tenemos:

$3(-2)^2 + 6(-2) + \lambda = 0$

$12 - 12 + \lambda = 0$

$\lambda = 0$

Luego: $3x^2 + 6x = 0$

$3x(x + 2) = 0$

$x = 0 \ \vee \ x = -2 \qquad CS = \{0; -2\}$

$\therefore$ La otra raíz es: $x = 0$

Clave E

18. Del enunciado:

$(x - 1) = (x - 2)(2x - 5) \Rightarrow x - 1 = 2x^2 - 5x - 4x + 10$

$0 = 2x^2 - 10x + 11$

Luego:

$\therefore \ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{11}{2}$

Clave A

19. Si 2 es una raíz $\Rightarrow (2)^2 - (a + 1)(2) - 5 = 0$

de donde $a = \dfrac{-3}{2}$

$\Rightarrow x^2 - (a + 1)x - 5 = 2x^2 + x - 10 = 0$

$\therefore$ Suma de raíces: $2 + x_2 = -\dfrac{1}{2}$

Clave D

Resolución de problemas

20. $x^2 + 4kx + (2k - 3)(2k + 3) = 0$

$x \qquad 2k - 3$

$x \qquad 2k + 3$

$\Rightarrow x_1 = 3 - 2k \ \wedge \ x_2 = -2k - 3$

Como:

$-5 < x_1 < 11$

$-5 < 3 - 2k < 11$

$\Rightarrow -4 < k < 4 \qquad ...(1)$

$-5 < x_2 < 11$

$-5 < -2k - 3 < 11$

$\Rightarrow -7 < k < 1 \qquad ...(2)$

De (1) y (2): $-4 < k < 1 \qquad \therefore k \in \langle -4; 1\rangle$

Clave A

21. De la ecuación:

$x^2 + (2 - a)x - (a + 3) = 0$

Sabemos que:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{(2-a)}{1} = a - 2 \quad ...(I)$

$x_1x_2 = -\dfrac{a+3}{1} = -(a + 3) \quad ...(II)$

Elevamos al cuadrado en (I):

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = (a - 2)^2$

$x_1^2 + x_2^2 - 2(a + 3) = (a - 2)^2$

$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a + 10$

$\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\text{mínimo}} = \underbrace{(a - 1)^2}_{0} + 9$

Luego: $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Clave C

22. $2x^2 - 3x + c = 0$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{3}{2} \ \wedge \ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{2} \qquad ...(1)$

Del enunciado:

$x_1^3 + x_2^3 > \dfrac{1}{8} \qquad ...(2)$

De (1): $(x_1 + x_2)^3 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$

$x_1^3 + 3x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2) + x_2^3 = \dfrac{27}{8}$

$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot \dfrac{c}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{27}{8}$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = \dfrac{27}{8} - \dfrac{9c}{4} \qquad ...(3)$

Reemplazamos (3) en (2):

$\dfrac{27}{8} - \dfrac{9c}{4} > \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{26}{8} > \dfrac{9c}{4}$

$13 > 9c$

$\downarrow$

1

Por lo tanto, **c** solo admite un valor natural.

Clave B

Nivel 3 (página 80) Unidad 3

Comunicación matemática

23. I. (V)

Usamos las propiedades de las raíces para obtener con qué valores de "q" se cumple: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{4}{7}$

$x_1 + x_2 = -\frac{q}{3} \Rightarrow q = -3(x_1 + x_2)$ ...(1)

$x_1 \cdot x_2 = \frac{84}{3} = 28$ ...(2)

De la condición: $x_1 = \frac{4}{7}x_2$ ...(3)

(3) en (2):

$\left(\frac{4}{7}x_2\right)x_2 = 28 \Rightarrow x_2 = \pm 7$

$\Rightarrow x_1 = \pm 4$

x_1 y x_2 en (1)

i. Con $x_1 = 4$ y $x_2 = 7 \Rightarrow q = -3(4 + 7)$
$q = -33$

ii. Con $x_1 = -4$ y $x_2 = -7 \Rightarrow q = -3(-4 - 7)$
$q = 33$

En conclusión: $|q| = 33$

II. (F)
$|x_1 \cdot x_2| = |\pm 7 \cdot \pm 4| = 28$

III. (F)
$|x_1 + x_2| = 11$

IV. (V)

24. Según el enunciado:

$2x + 78\left(\frac{1}{x}\right) = 32$

Operamos y simplificamos: $x^2 - 16x + 39 = 0$

Clave B

Razonamiento y demostración

25. Sean x_1 y x_2 raíces de la ecuación:

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2m}{m-2} = 6$

$2m = 6m - 12$

$4m = 12$

$\therefore\ m = 3$

Clave B

26. $x = z^2$ como $x \in \mathbb{R} \rightarrow x \geq 0$

En la ecuación

$4z + z^2 - 5 = 0$

$z^2 + 4z - 5 = 0$

z   5
z   –1

$\Rightarrow z = -5 \vee z = 1$

$\Rightarrow x = 25 \vee x = 1$

$\therefore$ la mayor solución es $x = 25$

Clave C

27. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)$ ...(1)

Donde: $x_1 + x_2 = -(-3n) = 3n$

$x_1 \cdot x_2 = n^2$

Reemplazamos en (1): $(3n)^2 - 2(n^2) = 175$

De donde: $n = \pm 5$

Clave D

28. Sea la ecuación:

$3x^2 + 41x + n = 0$

Dato: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 7 \Rightarrow \frac{n}{3} = 7 \Rightarrow n = 21$

Clave E

29. $E = a(a^2 + a + 1) + b(b^2 + b + 1)$

Como a y b son raíces, entonces verifican la ecuación dada: $x^2 + x + 1 = -1$

$a^2 + a + 1 = -1$

$b^2 + b + 1 = -1$

Luego: $E = a(-1) + b(-1) \Rightarrow E = -(a + b)$

Sabemos que: $a + b = -1$ (suma de raíces)

$\therefore\ E = -(-1) = 1$

Clave B

30. Por dato, α y β son raíces de:

$x^2 - 6x + 3 = 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 6 \wedge \alpha \cdot \beta = 3$

Piden:

$(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + \beta + \alpha + \alpha\beta$

$\therefore (1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + 6 + 3 = 10$

Clave C

31. $(k - 3)x^2 - 2kx + 6k = 0$ ...(1)

Del enunciado se deduce que $\Delta \geq 0$; la suma y el producto de raíces tienen que ser positivos entonces:

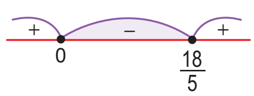
$\Delta = (-2k)^2 - 4(k - 3)6k \geq 0$

$4k^2 - 24k^2 + 72k \geq 0$

$-20k^2 + 72k \geq 0$

$5k^2 - 18k \leq 0$

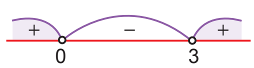
$k(5k - 18) \leq 0$



$\Rightarrow k \in \left[0; \frac{18}{5}\right]$ ...(2)

Además: $x_1 + x_2 > 0$

Entonces: $\frac{2k}{k-3} > 0$



$k \in \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$ ...(3)

También: $x_1 \cdot x_2 > 0$

Entonces: $\frac{6k}{k-3} > 0$

$\Rightarrow k \in \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$ ...(4)

intersectamos (2), (3) y (4): $3 < k \leq \frac{18}{5}$

$\therefore k \in \left\langle 3; \frac{18}{5}\right]$

Clave D

Resolución de problemas

32. $P(x) = -x^2 + (h - 2)x + h + 3$

Entonces:

$x_1 + x_2 = h - 2$ ...(1)

$x_1 \cdot x_2 = -(h + 3)$ ...(2)

Elevamos al cuadrado (1) y luego reemplazamos (2):

$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = h^2 - 4h + 4$

$x_1^2 + x_2^2 + 2(-h - 3) = h^2 - 4h + 4$

Agrupamos términos:

$x_1^2 + x_2^2 = h^2 - 2h + 10$

$x_1^2 + x_2^2 = (h - 1)^2 + 9$

$(x_1^2 + x_2^2)_{mín.} = \underbrace{(h - 1)^2}_{0} + 9$

$\therefore h = 1$

Clave C

33. Sea:

t(días): el tiempo que dura el viaje en tren.

C(euros, €): el costo del viaje por 1 día en auto.

Luego:

Auto: (4 + t) días, $\frac{\text{costo}}{\text{día}}$: C

Tren: t días, $\frac{\text{costo}}{\text{día}}$: C + 24

$(\text{n.° días})\left(\frac{\text{costo}}{\text{día}}\right) = \text{cte.} = 702$ €

$\Rightarrow (t + 4)C = t(C + 24)$

$Ct + 4C = Ct + 24t$

$C = 6t$ ...(1)

- El costo total en auto es:

$(4 + t)C = 702$ ...(2)

(1) en (2):

$(4 + t)(6t) = 702$

$t^2 + 4t - 117 = 0$

t   +13
t   –9

$(t + 13)(t - 9) = 0$

$t + 13 = 0 \vee t - 9 = 0$

$t = -13 \vee t = 9$

$\therefore$ El viaje en auto dura:

$4 + t = 4 + 9 = 13$ días

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 83) Unidad 3

Comunicación matemática

1. $\lambda = x^2 - 6x + 8 < 0$ ...(1)
$\lambda = x^2 - 2\,.\,x\,.\,3 + 3^2 - 1$
$\lambda + 1 = (x-3)^2 \geq 0$
$\Rightarrow \lambda \geq -1$ ...(2)

De (1) y (2):
$\therefore -1 \leq \lambda < 0$

Clave D

2. Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$
Donde: $a > 0 \wedge \Delta = b^2 - 4ac < 0$

Por propiedad:
$\therefore P(x) > 0;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Clave C

Razonamiento y demostración

3. $x^2 - 4x + 1 \leq 0$

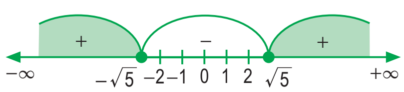
Sumamos 3 en ambos miembros:
$x^2 - 4x + 4 \leq 3$
$(x-2)^2 \leq 3$

Sacamos raíz cuadrada:
$-\sqrt{3} \leq x - 2 \leq \sqrt{3}$

Sumamos 2: $2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$
$\therefore x \in [2 - \sqrt{3};\ 2 + \sqrt{3}\,]$

Clave A

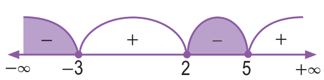
4. $x(x+2) > 2(x+1) + 3$
$x^2 + 2x > 2x + 5$
$x^2 > 5$
$x > \sqrt{5}\ \vee\ x < -\sqrt{5}$



Valores enteros que no satisfacen la inecuación: {–2; –1; 0; 1; 2}
$\therefore$ Número de valores que no satisfacen la inecuación: 5

Clave C

5. Dato: $CS = \langle -\infty; a] \cup [b; c]$ ...(I)
$(x+3)(x-2)(x-5) \leq 0$
Puntos críticos: –3; 2 y 5



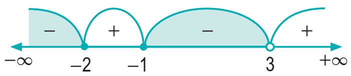
$CS = \langle -\infty; -3] \cup [2; 5]$ ...(II)

De (I) y (II):
Identificamos $a = -3$; $b = 2$ y $c = 5$
Nos piden: $b + c - a = 2 + 5 - (-3) = 10$

Clave E

6. $\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x-3)} \leq 0$

$(x+2)(x+1)(x-3) \leq 0\ \wedge\ x \neq 3$
Puntos críticos: –2; –1 y 3



$CS = \langle -\infty; -2] \cup [-1; 3\rangle$

Clave E

7. $a + b = a^2 + 1$
$b = a^2 - a + 1$
$b = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Se sabe que:
$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

$b \geq \frac{3}{4}$ $\therefore b \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right\rangle$

Clave E

8. $x^2 - x - 1 \leq 0$

$\underbrace{x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \leq 0$

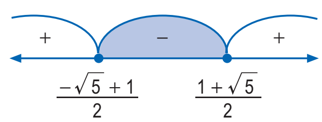
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 \leq 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \leq 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \leq 0$

$\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0$

$\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \leq 0$



$\therefore CS = \left[\frac{-\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$

Clave B

9. $x - 8 + \frac{12}{x-6} \geq 2 - x + \frac{12}{x-6} \wedge x \neq 6$

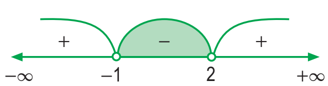
$2x \geq 10 \wedge x \neq 6$

$x \geq 5 \wedge x \neq 6$

$\therefore\ x \in [5; +\infty\rangle - \{6\}$

Clave E

10. De la inecuación:
$(x+1)(x-2) > 0;\ x \neq 2$



$\therefore CS = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$

Clave E

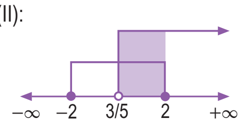
Resolución de problemas

11. $\frac{6x+1}{7-4x};\ -2 \leq x \leq 2$ ...(I)

Además: $6x + 1 > 7 - 4x$

$10x > 6 \Rightarrow x > \frac{3}{5}$ ...(II)

De (I) ∩ (II):



$\therefore\ x \in \left\langle \frac{3}{5}; 2\right]$

Clave D

12. $3E - 75 < 15 \Rightarrow 3E < 90 \Rightarrow E < 30$
$\frac{E}{2} + 7 > 21 \Rightarrow \frac{E}{2} > 14 \Rightarrow E > 28$

Donde: $28 < E < 30$
$\therefore$ La edad de Estela es 29 años.

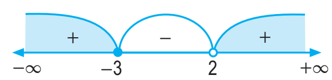
Clave D

Nivel 2 (página 84) Unidad 3

Comunicación matemática

13. $\frac{x+3}{x-2} \geq 0$

$(x+3)(x-2) \geq 0\ \wedge\ x \neq 2$
Puntos críticos: –3 y 2



(C) $CS = \langle -\infty; -3] \cup \langle 2; +\infty\rangle$
(C) Una solución es –3.
(I) 2 no es una solución.

Clave C

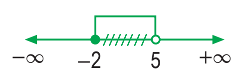
14. A. $5x - 3x - 14 < 3x - 3x - 4$
$2x - 14 < -4$

B. $x < 5$

C. $3x - 6x - 4 \leq 6x - 6x + 2$
$-3x - 4 \leq 2$

D. $x \geq -2$

E.



F. Los valores enteros del conjunto solución son: –2; –1; 0; 1; 2, 3 y 4

Razonamiento y demostración

15. $m \leq x^2 + 8x + 16 - 3 \leq n$
$m \leq (x+4)^2 - 3 \leq n$
Sabemos:
$-6 \leq x \leq -2$
$-2 \leq x + 4 \leq 2$
$0 \leq (x+4)^2 \leq 4$
$-3 \leq (x+4)^2 - 3 \leq 1$
$\Rightarrow m = -3 \wedge n = 1$ $\therefore m\,.\,n = -3$

Clave A

16. $3x^2 + x + 8 \geq 0$

Recuerda:

Si: $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta \leq 0$

Luego, analizamos el discriminante:

$\Delta = 1^2 - 4(3)(8) = -95$

$\Rightarrow \Delta = -95 \leq 0$

$\therefore x \in \mathbb{R}$

Clave B

17. $8x + 3 - 4x^2 \leq k, \forall x \in \mathbb{R}$

Dando forma:

$4x^2 - 8x + (k - 3) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0$

$(-8)^2 - 4(4)(k - 3) \leq 0$

$64 \leq 16(k - 3)$

$k - 3 \geq 4 \Rightarrow k \geq 7$

$\therefore k_{mín.} = 7$

Clave C

18. $\dfrac{1}{4x^2 - 25} \geq 0$

Se observa que: $4x^2 - 25 > 0 \Rightarrow x^2 > \dfrac{25}{4}$

Recuerda:

Si $x^2 > a \wedge a > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{a} \vee x < -\sqrt{a}$

Luego:

$x > \dfrac{5}{2} \vee x < -\dfrac{5}{2}$

$x \in \langle -\infty; -\dfrac{5}{2} \rangle \cup \langle \dfrac{5}{2}; +\infty \rangle$

$\therefore$ No es solución: $\left[-\dfrac{5}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$

Clave B

19. $\dfrac{x+1}{x-3} > 1 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-3} - 1 > 0$

$\dfrac{4}{x-3} > 0 \Rightarrow x - 3 > 0$

$x > 3 \Rightarrow x \in \langle 3; +\infty \rangle$

Clave D

20. $\dfrac{2}{x} \geq \dfrac{3}{x} + 1$

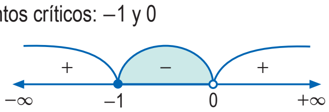
Resolvemos:

$\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x} + 1 \leq 0$

$\dfrac{1}{x} + 1 \leq 0 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x} \leq 0 \wedge x \neq 0$

$\Rightarrow x(x + 1) \leq 0 \wedge x \neq 0$

Puntos críticos: -1 y 0



$CS = [-1; 0\rangle$

Clave B

21. Resolvemos:

$\dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1} < 1$

$\dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1} - 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{x - 1}{\underbrace{x^2 + 1}_{\geq 1, \forall x \in \mathbb{R}}} < 0$

$\Rightarrow x - 1 < 0$

$x < 1 \qquad CS = \langle -\infty; 1 \rangle$

El número de enteros no negativos que verifica la inecuación es el número cero.

$\therefore$ Número de valores es 1.

Clave A

22. $x + 1 < (x + 1)(4x - x^2 - 3)$

$(x^2 - 4x + 3)(x + 1) + x + 1 < 0$

$(x + 1)[x^2 - 4x + 4] < 0$

$(x + 1)\underbrace{[x - 2]^2}_{> 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{2\}} < 0$

$x + 1 < 0 \wedge x \neq 2$

$x < -1 \wedge x \neq 2$

$\therefore x \in \langle -\infty; -1 \rangle$

Clave B

Resolución de problemas

23. De la inecuación:

$x^2 + 2kx + k > \dfrac{3}{16}; \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 2kx + k - \dfrac{3}{16} > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

Se cumple: $(2k)^2 - 4(1)\left(k - \dfrac{3}{16}\right) < 0$

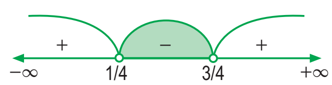
Desarrollamos:

$16k^2 - 16k + 3 < 0$

$(4k - 3)(4k - 1) < 0$

Puntos críticos:

$P.C. = \left\{\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4}\right\}$



$k \in \left\langle \dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{4} \right\rangle$

Clave B

24. Sean las fracciones: $\dfrac{x}{13}$ y $\dfrac{x+1}{13}$

Por dato: $\dfrac{x}{13} < 0,15\overset{\frown}{45} < \dfrac{x+1}{13}$ ...(I)

Convirtiendo el número decimal:

$0,15\overset{\frown}{45} = \dfrac{1545 - 15}{9900} = \dfrac{1530}{9900} = \dfrac{153}{990} = \dfrac{17}{110}$

$\Rightarrow 0,15\overset{\frown}{45} = \dfrac{17}{110}$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I):

$\dfrac{x}{13} < \dfrac{17}{110} < \dfrac{x+1}{13} \Rightarrow \dfrac{x}{13} < \dfrac{17}{110} \wedge \dfrac{17}{110} < \dfrac{x+1}{13}$

$\Rightarrow x < 2,009 \wedge 1,009 < x$

Como $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ La menor fracción es $\dfrac{2}{13}$.

Clave A

Nivel 3 (página 85) Unidad 3

Comunicación matemática

25. Sabemos: $MA \geq MH$

$\dfrac{a + b + c}{3} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}$

$\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq 9$ ...(1)

Como: $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)(a + b + c) \geq \lambda$ ...(2)

De (1) y (2):

$\therefore \lambda_{máx.} = 9$

Clave C

26.
- Si se vende la cuarta parte quedan: $x - \dfrac{x}{4}$

  Quedan menos de 119:

  $\Rightarrow x - \dfrac{x}{4} < 119$ ...(1)

- Si se vende la sexta parte quedan: $x - \dfrac{x}{6}$

  Quedan más de 130 por vender:

  $\Rightarrow x - \dfrac{x}{6} > 130$ ...(2)

  Luego, el sistema lineal de inecuaciones está conformado por (1) y (2):

  $x - \dfrac{x}{4} < 119$

  $x - \dfrac{x}{6} > 130$

Clave C

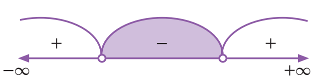
Razonamiento y demostración

27. $\dfrac{-x - 4}{3} > \dfrac{3x^2 - 16}{3}$

$0 > 3x^2 + x - 12$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-12)}}{2(3)}$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{145}}{6}$



$\dfrac{-1 - \sqrt{145}}{6} \qquad \dfrac{-1 + \sqrt{145}}{6}$

Luego:

$-2,1735 < x < 1,840$

$x \in \{-2; -1; 0; 1\}$

$\therefore$ n.° valores enteros es: 4

Clave E

28. Se tiene:

$(n^2-1)x^2-2(1-n)x+1\geq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}$

Por teorema se cumple:

$n^2-1>0\ \wedge\ \Delta\leq 0$

$n^2>1\wedge b^2-4ac\leq 0$

$n>1\vee n<-1\wedge([-2(1-n)]^2-4(n^2-1)(1)\leq 0)$

$n>1\vee n<-1\ \wedge\ ((n-1)^2-(n^2-1)\leq 0)$

$n>1\vee n<-1\ \wedge\ (2-2n\leq 0)$

$n>1\vee n<-1\ \wedge\ n\geq 1$

Luego: $n>1$

$\therefore n\in\langle 1;+\infty\rangle$

Clave D

29. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}\leq 0$

Factorizamos:

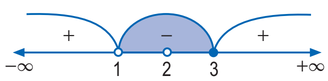
$\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-1)}\leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{(x-3)}{(x-1)}\leq 0\ \wedge\ x-2\neq 0\wedge x-1\neq 0$

$\dfrac{(x-3)}{(x-1)}\leq 0\ \wedge\ x\neq\{1;2\}$

$\Rightarrow (x-3)(x-1)\leq 0\ \wedge\ \ x\neq\{1;2\}$

Puntos críticos: 1 y 3



$\therefore\ CS=\langle 1;3]-\{2\}$

Clave B

30. $0<\dfrac{x^3-1}{x-1}<3;\ \ x-1\neq 0$

$0<\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}<3;\ \ x\neq 1$

$0<x^2+x+1<3;\ \ x\neq 1$

Para completar cuadrados, sumamos $-\dfrac{3}{4}$:

$-\dfrac{3}{4}<x^2+x+\dfrac{1}{4}<\dfrac{9}{4}$

$-\dfrac{3}{4}<\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2<\dfrac{9}{4}$

$0\leq\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2<\dfrac{9}{4}$

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2<\dfrac{9}{4}$

Sacando raíz cuadrada, tenemos:

$-\dfrac{3}{2}<x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{2}$

Restamos $\dfrac{1}{2}$: $-2<x<1$

$\therefore\ CS=\langle -2;1\rangle$

Clave B

31. Sabemos: $MA\geq MG$

$\dfrac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$

$\dfrac{1}{4}\geq\underbrace{\dfrac{\sqrt[4]{abcd}}{a+b+c+d}}_{\lambda}$

$\therefore\ \lambda\leq\dfrac{1}{4}$

Clave A

32. Sea M la expresión:

$M=\dfrac{x-3}{x+1}=1-\dfrac{4}{x+1}$

Dato:

$5\leq x\leq 8$

$6\leq x+1\leq 9$

$\dfrac{1}{9}\leq\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{4}{9}\leq\dfrac{4}{x+1}\leq\dfrac{4}{6}$

$\Rightarrow\dfrac{-2}{3}\leq-\dfrac{4}{x+1}\leq\dfrac{-4}{9}$

$\therefore\ \dfrac{1}{3}\leq 1-\dfrac{4}{x+1}\leq\dfrac{5}{9}$

Clave D

33. Resolvemos:

$(x+1)^2(x-2)(x^2-x-6)>0$

$\underbrace{(x+1)^2}(x-2)(x-3)(x+2)>0$

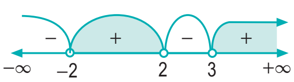
positivo $\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Ahora queda:

$(x-2)\,(x-3)\,(x+2)>0\ \wedge\ x\neq -1$

Puntos críticos:

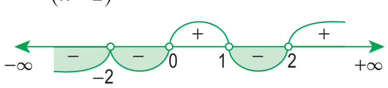
P. C. $=\{-2;2;3\}$



$x\in\langle -2;2\rangle\cup\langle 3;+\infty\rangle-\{-1\}$

Clave D

34. $\dfrac{(x-1)^7\,(x+2)^8x}{(x-2)^5}<0$



PC de exponente par

$CS=\langle-\infty;-2\rangle\cup\langle -2;0\rangle\cup\langle 1;2\rangle$

$\therefore$ Un intervalo solución es: $\langle 1;2\rangle$

Clave E

Resolución de problemas

35. Sean:

G: n.° hijos de Gianna

M: n.° hijos de Mirella

A: n.° hijos de Alicia

Del enunciado:

$G+M<6$ ...(I)

$G>A$ ...(II)

$M-1>A\Rightarrow M>A+1$ ...(III)

Sumamos (II) $\wedge$ (III):

$G+M>2A+1$ ...(IV)

De (I) $\wedge$ (IV):

$2A+1<G+M<6$

$2A+1<6\Rightarrow A<\dfrac{5}{2}\Rightarrow A=1;2$

Si: $A=1$

$\Rightarrow G>1\Rightarrow G=2;3;4$

$M>2\Rightarrow M=3;4;5$

Solo cumple cuando:

$G=2\ \ \wedge\ \ M=3$

Entonces, Mirella tiene 3 hijos.

Clave C

36. Sean:

x: la cantidad de agua en cada litro de ácido acético M.

y: la cantidad de agua en cada litro de ácido acético N.

Del enunciado:

- $\underbrace{\text{Cada litro de ácido acético M}}_{x}$ contiene; $\underbrace{\text{al menos}}_{\geq}$, 5 veces la cantidad de agua que $\underbrace{\text{cada litro de ácido acético N,}}_{5y}$

  $\Rightarrow x\geq 5y$ ...(1)

- $\underbrace{\text{Mezcla de 5 litros de c/u de los ácidos acético M, N}}_{5x+5y}$ contiene, $\underbrace{\text{al menos}}_{\geq}$, $\underbrace{\text{7 unidades de agua}}_{7}$

  $\Rightarrow 5x+5y\geq 7$ ...(2)

- Sumamos (1) y (2): $\left.\begin{array}{r}x-5y\geq 0\\ 5x+5y\geq 7\end{array}\right\}(+)$

  $6x\geq 7$

  $x\geq\dfrac{7}{6}$

  El número mínimo de unidades de agua que contiene cada litro de ácido acético M es $\dfrac{7}{6}$.

Clave E

MARATÓN MATEMÁTICA (página 86)

1.
- $\sqrt{x+2} = 3$
  $x + 2 = 9 \Rightarrow x = 7$
- $\frac{x}{3} + 4 = 7 \Rightarrow \frac{x}{3} = 3 \Rightarrow x = 9$
- $\sqrt{2x^2 - 4} = x \Rightarrow 2x^2 - 4 = x^2 \wedge x \geq 0$
  $x^2 = 4 \Rightarrow x = +2$
- $x^2 - x - 6 = 0$
  $x \quad -3$
  $x \quad 2$
  $\Rightarrow x = 3\ ;\ x = -2$
- $\sqrt{x+2} - \sqrt{1-3x} = 1$
  $\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{1-3x}$
  $x + 2 = 1 + 2\sqrt{1-3x} + 1 - 3x$
  $4x = 2\sqrt{1-3x}$
  $2x = \sqrt{1-3x}\ (x \geq 0 \wedge 1 - 3x > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} > x)$
  $4x^2 = 1 - 3x$

$4x^2 + 3x - 1 = 0$
$4x \quad -1$
$1x \quad 1$

$x = 1/4 \wedge x = -1$ (no cumple, ya que $x \geq 0$)
$\Rightarrow x = 1/4$

2. (C) $4 \times 3 \Rightarrow$ indica 4 filas por 3 columnas
(C)
(C) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por inducción

3. Multiplicamos las matrices:

$\begin{pmatrix} m & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 12 \\ 7 & p \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3m + 5n & 7m + 5 \\ 3 + 2n & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 12 \\ 7 & p \end{pmatrix}$

Igualando elementos:
$3m + 5n = q$ ...(1)
$7m + 5 = 12 \Rightarrow m = 1$
$3 + 2n = 7 \Rightarrow n = 2$
$\Rightarrow p = 9$
En la primera ecuación:
$3(1) + 5(2) = q \Rightarrow q = 13$
$\therefore m + n + p + q = 1 + 2 + 9 + 13 = 25$

Clave C

4. $\text{Det}(H) = x^2 + 6x = 7$
$x^2 + 6x - 7 = 0$
$x \quad +7$
$x \quad -1$
$(x + 7)(x - 1) = 0$
$x = -7\ ;\ x = 1$
Como $x > 0 \Rightarrow x = 1$, reemplazando en la matriz:

$H = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow H^2 = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Clave D

5. $\begin{cases} x + 6y = m \\ 3x + 3y = 7 \end{cases}$

Entonces:
- $x = m - 6\frac{(7-3x)}{3}$
  $x = m - 2(7 - 3x)$
  $x = m - 14 + 6x$

$\frac{14 - m}{5} = x;\quad (x > 0)$

$14 - m > 0 \Rightarrow m < 14$
$m \in \langle -\infty; 14 \rangle$ ...(1)

- $y = \frac{m - x}{6} = \frac{m - \left(\frac{7-3y}{3}\right)}{6}$

  $6y = m - \frac{7}{3} + y$

  $5y = m - \frac{7}{3}$

  $y = \frac{m - \frac{7}{3}}{5} > 0 \Rightarrow m \in \langle \frac{7}{3}; +\infty \rangle$

$\therefore m \in \langle \frac{7}{3}; 14 \rangle$

Clave D

6. $\frac{a}{4} = \frac{3}{b} = \frac{6}{1}$

$\Rightarrow a = 24\ ;\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore a + 2b = 24 + 1 = 25$

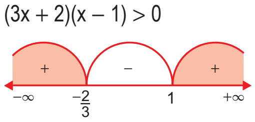
Clave A

7. Restringimos:
$x^2 - 3x + 3 \geq 0$
$\Delta < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ ... (I)
$2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$x \in \langle \frac{1}{2}; +\infty \rangle$...(II)

De (I) y (II): $x \in \langle \frac{1}{2}; +\infty \rangle$...(II)

Desarrollamos elevando al cuadrado:
$x^2 - 3x + 3 < (2x - 1)^2$
$x^2 - 3x + 3 < 4x^2 - 4x + 1$
$3x^2 - x - 2 > 0$
$3x \quad 2$
$x \quad -1$
$(3x + 2)(x - 1) > 0$



$\Rightarrow x \in \left\langle -\infty; -\frac{2}{3} \right\rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$ ...(IV)

Intersectando (III) y (IV), tenemos:
$x \in \langle 1; +\infty \rangle$
$CS = \langle 1; +\infty \rangle$

Clave E

8. $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < 3x + 12 \leq 27\}$
$-3 < 3x + 12 \leq 27$
$-1 < x + 4 \leq 9$
$-5 < x \leq 5;\ x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A = \{-4; -3; ... 4; 5\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z}^+ / 17 \leq x^2 + 1 \leq 50\}$
$16 \leq x^2 \leq 49$
$4 \leq x \leq 7 \vee -7 \leq x \leq -4\ (x \in \mathbb{Z}^+)$

Como: $x \in \mathbb{Z}^+$
$\Rightarrow B = \{4; 5; 6; 7\}$
$\therefore A \cap B = \{4; 5\}$

Clave C

9. Como: 0; 1; 2; ... ; (n – 1) son las raíces del polinomio, entonces:
$P(0) = P(1) = P(2) = ... = P(n - 1) = 0$ ...(1)

Además:
$P(x) = (x - 0)(x - 1)(x - 2)...(x - (n-1))$

Entonces:
$P(n) = (n)(n - 1)(n - 2) ... 1 = n!$ ...(2)

Reemplazando (1) y (2) en la matriz:

$A = \begin{pmatrix} n! & p(n+1) & p(n+2) \cdots & p(2n) \\ 0 & n! & p(n+1) & p(2n-1) \\ 0 & 0 & n! & p(2n-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ \cdots & n! \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$

$\Rightarrow |A| = (n!)^{n+1}$

Clave E

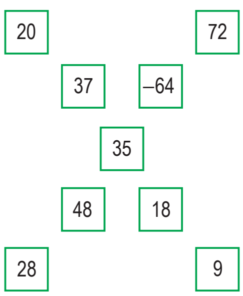
VALOR ABSOLUTO

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 91) Unidad 4

Comunicación matemática

1. En realidad hay varias soluciones, en lugar del 37 y el 28 se pueden ubicar otros dos números que suman 135; por ejemplo, el 80 y el 55 o el 77 y el 58.



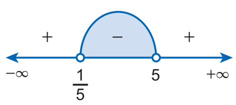
2. Ejercicio 2: Emily

Porque: $\left|\frac{3x-3}{x+1}\right| < 2$

$\frac{(3x-3)^2}{(x+1)^2} < 4$

$\frac{9x^2-18x+9}{x^2+2x+1} - 4 < 0$

$(5x-1)(x-5) < 0$



$\left|\frac{3x-3}{x+1}\right| < 2 \Rightarrow CS = \left\langle\frac{1}{5}; 5\right\rangle$

Emily

Ejercicio 4: Estela

Porque: $\left|\frac{6}{5x-4}\right| > 3$

$\frac{6|5x-4|}{|5x-4|} > 3|5x-4|$

$3|5x-4| < 6$

$|5x-4| < 2$

$-2 < 5x-4 < 2 \rightarrow 2 < 5x < 6 \Rightarrow \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}$

$\left|\frac{6}{5x-4}\right| > 3 \rightarrow CS = \left\langle\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right\rangle$

Estela

Razonamiento y demostración

3. $\underbrace{|x+1| \le 2}_{(I)} \le \overbrace{2 \le |x+3|}^{(II)}$

De (I):

$|x+1| \le 2 \Rightarrow -2 \le x+1 \le 2$

Restamos 1:

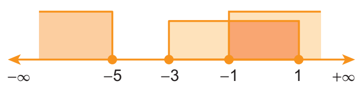
$-3 \le x \le 1 \quad ...(S_1)$

De (II):

$|x+3| \ge 2 \Rightarrow x+3 \ge 2 \vee x+3 \le -2$

$x \ge -1 \quad \vee \quad x \le -5 \quad ...(S_2)$

$S_1 \cap S_2$:



$x \in [-1; 1]$

Nos piden: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$

$\therefore$ Tiene 3 soluciones enteras.

Clave D

4. $|x|\, x \le 4$

- Sea $x \ge 0 \quad ...(I)$

  $x \,.\, x \le 4 \Rightarrow x^2 \le 4$

  $-2 \le x \le 2 \quad ...(II)$

  De (I) y (II): $0 \le x \le 2 \; ...(S_\alpha)$

- Sea: $x < 0 \quad ...(III)$

  $-x \,.\, x \le 4 \Rightarrow x^2 \ge -4$

  Redefiniendo:

  $x^2 \ge 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad ...(IV)$

  De (III) y (IV): $x < 0 \quad ...(S_\beta)$

  $CS = S_\alpha \cup S_\beta$

  $\therefore x \in \langle -\infty; 2]$

Clave D

5. Sea $a = |x-2|$

$\Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2 = 0$

a –2

a –1

$(a-2)(a-1) = 0$

$a-2 = 0 \vee a-1 = 0$

$a = 2 \qquad a = 1$

Como $a = |x-2|$:

- $|x-2| = 2$

  $x-2 = 2 \vee x-2 = -2$

  $x = 4 \qquad x = 0$

- $|x-2| = 1$

  $x-2 = 1 \vee x-2 = -1$

  $x = 3 \qquad x = 1$

$\Rightarrow CS = \{0; 1; 3; 4\}$

Por lo tanto, la menor y mayor solución son: {0; 4}

Clave E

6. Sea $|x-4| = b \ge 0$

$b^2 - 5b + 6 = 0$

b –3

b –2

$(b-3)(b-2) = 0$

$b = 3 \vee b = 2$

Como $b = |x-4|$:

- $|x-4| = 3$

  $x-4 = 3 \vee x-4 = -3$

  $x = 7 \vee \quad x = 1$

- $|x-4| = 2$

  $x-4 = 2 \vee x-4 = -2$

  $x = 6 \vee \quad x = 2$

Por lo tanto:

La suma de valores de x es:

$7 + 1 + 6 + 2 = 16$

Clave A

7. De la ecuación:

$5|x-1| - 6 = 2\sqrt{(x-1)^2}$

Recuerda: $\sqrt{x^2} = |x|$

Luego:

$5|x-1| - 6 = 2|x-1|$

$3|x-1| = 6 \Rightarrow |x-1| = 2$

Por teorema:

$x-1 = 2 \;\vee\; x-1 = -2$

$x_1 = 3 \;\vee\; x_2 = -1$

Nos piden: $x_1 + x_2 = 2$

Clave D

8. De la inecuación:

$|2x+8| \le |x+4| + 3$

$2|x+4| \le |x+4| + 3$

$|x+4| \le 3$

Luego: $-3 \le x+4 \le 3 \Rightarrow -7 \le x \le -1$

$\therefore x \in [-7; -1]$

Clave C

9. Sabemos: $A \le 4x^2 - 12x + 1 < -B \quad ...(I)$

Dato: $|2x| < 5$

Por propiedad: $-5 < 2x < 5$

Restamos 3: $-8 < 2x-3 < 2$

Elevamos al cuadrado:

$0 \le (2x-3)^2 < 64 \Rightarrow 0 \le 4x^2 - 12x + 9 < 64$

Restamos 8:

$-8 \le 4x^2 - 12x + 1 \le 56 \quad ...(II)$

De (I) $\wedge$ (II):

$A = -8 \;\wedge\; B = -56$

Nos piden:

$\frac{B}{A} = \frac{-56}{-8} = 7$

Clave B

10. De la ecuación: $|x^2-4| = |3x|$

Luego:

$x^2 - 4 = 3x \;\vee\; x^2 - 4 = -3x$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \;\vee\; x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0 \;\vee\; (x+4)(x-1) = 0$

$x = 4 \vee x = -1 \vee x = -4 \vee x = 1$

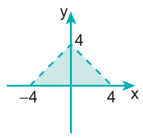
$CS = \{-4; -1; 1; 4\}$

Clave E

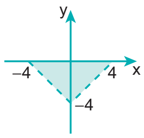
Resolución de problemas

11. Para mayor facilidad, analizaremos dos casos:

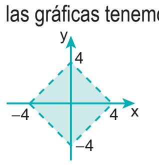
- Cuando, $y \geq 0 \ \wedge \ y < 4 - |x|$:



- Cuando, $y < 0 \ \wedge \ y > |x| - 4$:

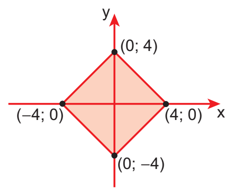


- Uniendo las gráficas tenemos:

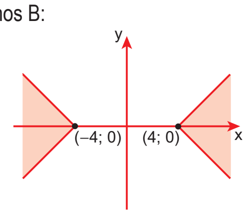


Clave E

12. Graficamos A:



Graficamos B:



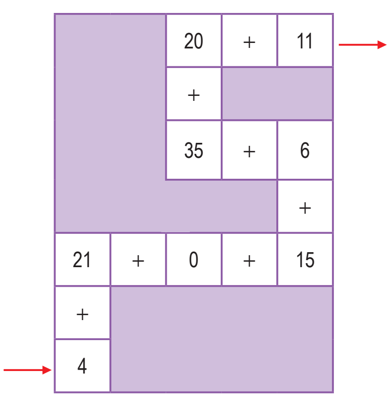
Luego, $A \cap B$: $\quad A \cap B = \{(-4; 0); (4; 0)\}$

Clave B

Nivel 2 (página 91) Unidad 4

Comunicación matemática

13.



14.

Razonamiento y demostración

15. $x^2 - 6x + 7 + |x - 3| = 0$

- Sea: $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad ...(I)$

  Luego:

  $x^2 - 6x + 7 + x - 3 = 0$

  $x^2 - 5x + 4 = 0$

  $x \quad -4$

  $x \quad -1$

  $\Rightarrow x = 4 \quad \vee \quad x = 1 \quad ...(II)$

  De (I) $\wedge$ (II): $x = 4$

- Sea: $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \quad ...(III)$

  Luego:

  $x^2 - 6x + 7 + 3 - x = 0$

  $x^2 - 7x + 10 = 0$

  $x \quad -5 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

  $x \quad -2 \qquad\quad x = 2 \quad ...(IV)$

  De (II) $\wedge$ (IV): $x = 2$

  $\Rightarrow$ CS = {2; 4} $\quad \therefore$ Tiene 2 soluciones.

Clave C

16. $|x^3 - 7x + 3|^2 \geq 3^2$

Sacamos la raíz de ambos miembros:

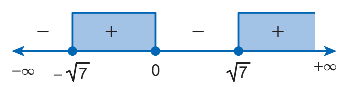
$x^3 - 7x + 3 \geq 3 \ \vee \qquad x^3 - 7x + 3 \leq -3$

$x^3 - 7x \geq 0 \ \vee \qquad x^3 - 7x + 6 \leq 0$

$x(x^2 - 7) \geq 0 \ \vee \ (x - 1)(x - 2)(x + 3) \leq 0$

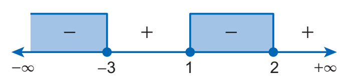
Luego:

- $x(x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) \geq 0$



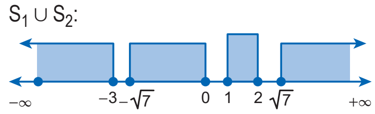
$x \in [-\sqrt{7}; 0] \cup [\sqrt{7}; +\infty\rangle \quad ...(S_1)$

- $(x - 1)(x - 2)(x + 3) \leq 0$



$x \in \langle -\infty; -3] \cup [1; 2] \quad ...(S_2)$

$S_1 \cup S_2$:



$x \in \langle -\infty; -3] \cup [-\sqrt{7}; 0] \cup [1; 2] \cup [\sqrt{7}; +\infty\rangle$

$\therefore$ Un intervalo solución es: [1; 2]

Clave E

17. De la ecuación:

$\underbrace{|x^4 + x^2 + 3|}_{+} - |3x + 5| + \underbrace{|x^2 + 1|}_{+} = x^4 + 2x^2$

Luego:

$x^4 + x^2 + 3 - |3x + 5| + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2$

$|3x + 5| = 4$

$\Rightarrow 3x + 5 = 4 \quad \vee \ 3x + 5 = -4$

$x_1 = -\frac{1}{3} \quad \vee \qquad x_2 = -3$

Nos piden: $x_1x_2 = 1$

Clave D

18. De la ecuación:

$||x - 1| - 2| = 1$

$|x - 1| - 2 = 1 \quad \vee \ |x - 1| - 2 = -1$

$|x - 1| = 3 \quad \vee \ |x - 1| = 1$

$\{x - 1 = 3 \vee x - 1 = -3\} \vee \{x - 1 = 1 \vee x - 1 = -1\}$

$x_1 = 4 \ \vee \quad x_2 = -2 \ \vee \ x_3 = 2 \quad \vee \ x_4 = 0$

Nos piden:

$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 4 + 2 + 2 + 0 = 8$

Clave E

19. De la inecuación: $m \leq |x + 9| \leq n \quad ...(I)$

Sabemos:

$|x - 3| \leq 5$

$-5 \leq x - 3 \leq 5$

Sumamos 12:

$7 \leq x + 9 \leq 17$

$7 \leq |x + 9| \leq 17 \quad ...(II)$

De (I) $\wedge$ (II): $m = 7 \ \wedge \ n = 17$

Clave C

20. De la inecuación: $|x - 2| < 197$

Recuerda: $|x| < a \Leftrightarrow a > 0 \wedge (-a < x < a)$

Luego: $-197 < x - 2 < 197$

$-195 < x < 199$

Luego:

$x \in \{-194; -193; ...; 0; 1; ...; 193; 194; 195; 196; 197; 198\}$

Nos piden, suma de elementos:

$195 + 196 + 197 + 198 = 786$

Clave C

21. De la inecuación:

$|4 - x| < |3 + 2x|$

Elevamos al cuadrado:

$(x - 4)^2 < (2x + 3)^2$

$(x - 4)^2 - (2x + 3)^2 < 0$

$(3x - 1)(-x - 7) < 0$

$(3x - 1)(x + 7) > 0$



$x \in \langle -\infty; -7\rangle \ \cup \ \langle 1/3, +\infty\rangle$

$x_{mín}\mathbb{Z}^+ = 1$

Clave A

Resolución de problemas

22. Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = -25\dfrac{x}{|x|} & ...(\alpha) \\ |2x - 3| + y = 10 & ...(\beta) \end{cases}$$

Analizando (α) tenemos:

$4x^2 + y^2 \geq 0$, entonces $-25\frac{x}{|x|} \geq 0$

$\therefore \ x < 0$

Considerando $x < 0$ en (α):

$4x^2 + y^2 = 25 \quad ...(1)$

Analizando (β) y considerando que $x < 0$ tenemos:

$\underbrace{|2x-3|}_{(-)} + y = 10$

$-(2x-3) + y = 10$

$-2x + 3 + y = 10$

Despejamos y: $y = 7 + 2x$

Ahora reemplazamos en (1):

$4x^2 + (2x+7)^2 = 25$

$4x^2 + 4x^2 + 28x + 49 = 25$

$8x^2 + 28x + 24 = 0$

$2x^2 + 7x + 6 = 0$

2x ╳ +3

x ╳ +2

$2x + 3 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$

$x = -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x = -2$

Por lo tanto, el menor valor de x es –2.

Clave C

23. Analizaremos cada una de las funciones f y g.

Veamos:

- $f(x) = \sqrt[4]{|x| - 8} - \sqrt{64 - x^2}$

  Determinamos su dominio: Dom(f) = CVA

  $|x| - 8 \geq 0 \ \wedge \ 64 - x^2 \geq 0$

  $\Leftrightarrow |x| \geq 8 \ \wedge \ 64 \geq x^2$

  $\Leftrightarrow (x \geq 8 \ \vee \ x \leq -8) \ \wedge \ (-8 \leq x \leq 8)$

  $\Leftrightarrow x = 8; -8$

  Entonces la función f = {(8; 0), (–8; 0)}

- $g(x) = x^3 \, \text{sgn}(x)$

  Entonces

  $$g(x) = \begin{cases} x^3; \ x > 0 \\ 0; \ x = 0 \\ -x^3; \ x < 0 \end{cases}$$

  Ahora veamos la composición (f o g)

  1.° $D(f \circ g) = \{x / x \in Dg \wedge g(x) \in Df\}$

  $= \{x / x \in Dg \wedge g(x) \in \{8; -8\}\}$

  $\Rightarrow D(f \circ g) = \underbrace{\{x / x \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ x^3 \in \{8; -8\}\}}_{\{2\}} \vee$

  $\underbrace{\{x / x \in \mathbb{R}^- \ \wedge \ -x^3 \in \{8; -8\}\}}_{\{-2\}} \vee$

  $\underbrace{\{x / x = 0 \ \wedge \ 0 \in \{8; -8\}\}}_{0}$

  $\Rightarrow D(f \circ g) = \{2; -2\}$

  2.° Hallamos:

  $(f \circ g)(x) = f(g(x)); \ \forall x \in D(f \circ g)$

  $x = 2$: $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(8) = 0$

  $x = -2$: $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(8) = 0$

  $\therefore$ (f o g) = {(2; 0); (–2; 0)}

  CVA: conjunto de valores admisibles

Clave C

Nivel 3 (página 92) Unidad 4

Comunicación matemática

24. I. $a \in \langle 0; 1\rangle \Leftrightarrow \frac{a}{1-a} > 0$

$\Rightarrow \frac{a}{a-1} < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$ (V)

II. $1 \leq x < 2 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} \geq 0 \wedge \frac{2-x}{2x} < \frac{1}{2}$

$0 < x \leq 2 \ \wedge \ (x < 0 \ \vee \ x > 1)$

$1 < x \leq 2$ (F)

III. $-2 < x < -1 \Leftrightarrow 2^2 < 2^{\left|\frac{x^2-1}{x+1}\right|} < 2^3$

$2 < \left|\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\right| < 3$

$-3 < x - 1 < -2 \ \vee \ 2 < x - 1 < 3$

$-2 < x < -1 \vee 3 < x < 4$ (F)

Clave C

25.

16	5	20	10	4
7	10	1	3	12
6	8	19	27	17
20	30	12	12	30
9	1	2	9	1
4	15	7	5	2
12	6	21	8	10
2	4	9	16	7
27	16	23	9	1

- $\frac{m}{n} = -5$
- $d = \frac{1}{5}(-10) = -2$
- $c = 2(-3) = -6$
- $a = b + 12 \Rightarrow b - a = -12$

Razonamiento y demostración

26. $3x - 21 > ||5x - 9| - |3 - 3x| + x - 21|$ ...(1)

De (1):

- $3x - 21 > 0 \Rightarrow x > 7$ ...(α)
- $3x - 21 > |5x - 9 - \{-(3 - 3x)\} + x - 21|$

  $3x - 21 > |5x - 9 + 3 - 3x + x - 21|$

  $3x - 21 > |3x - 27|$ ...(2)

De (2):

- Si $3x - 27 \geq 0 \Rightarrow x \geq 9$

  $\Rightarrow 3x - 21 > 3x - 27$

  $\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow x \in [9; +\infty\rangle$ ...(3)
- Si $3x - 27 < 0 \Rightarrow x < 9$

  $\Rightarrow 3x - 21 > -3x + 27$

  $6x > 48 \Rightarrow x > 8$

  $\Rightarrow x \in \langle 8; 9\rangle$ ...(4)

De (3) y (4):

$x \in \langle 8; +\infty\rangle$ ...(β)

De (α) y (β): $x \in \langle 8; +\infty\rangle$

Clave A

27. $A = \langle 1; 7]$

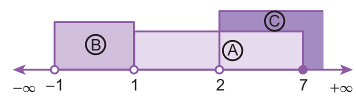
$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 1\}$

$x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$B = \langle -1; 1\rangle$

$C = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

$C = \langle 2; +\infty\rangle$



Luego:

$A \cup B \cup C = \langle -1; +\infty\rangle - \{1\}$

Nos piden:

$(A \cup B \cup C)' = \langle -\infty; -1] \cup \{1\}$

Clave B

28. $|2x - 6| - |x - 2| \leq |2x - 4| - |x - 3|$

$2|x - 3| - |x - 2| \leq 2|x - 2| - |x - 3|$

$3|x - 3| \leq 3|x - 2|$

$|x - 3| \leq |x - 2|$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$(x - 3)^2 \leq (x - 2)^2$

$(x - 3)^2 - (x - 2)^2 \leq 0$

$(2x - 5)(-1) \leq 0$

$2x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$

$\therefore x \in \left[\frac{5}{2}; +\infty\right\rangle$

Clave C

29. $||x| - 3| = |3x + 2|$

- Sea $x \geq 0$ ...(I)

  $|x - 3| = 3x + 2$

  Luego:

  $x - 3 = 3x + 2 \ \vee \ x - 3 = -3x - 2$

  $x = -\frac{5}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1}{4}$ ...(α)

  De (I) y (α): $x = \frac{1}{4}$
- Sea: $x < 0$ ...(II)

  $|-x - 3| = |3x + 2|$

  $|x + 3| = 3x + 2$

  Luego:

  $x + 3 = 3x + 2 \ \vee \ x + 3 = -3x - 2$

  $x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{4}$ ...(β)

  De (II) y (β): $x = -\frac{5}{4}$

  $\therefore \ CS = \left\{\frac{1}{4}; -\frac{5}{4}\right\}$

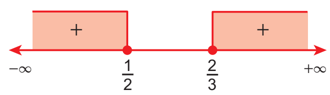
Clave D

30. $|x-1|-|5x-3|\leq 0$

$$|x-1|\leq|5x-3|$$

Elevamos al cuadrado:

$$(x-1)^2\leq(5x-3)^2$$
$$(5x-3)^2-(x-1)^2\geq 0$$
$$(6x-4)(4x-2)\geq 0$$
$$(3x-2)(2x-1)\geq 0$$



$\therefore\ x\in\langle -\infty;\ \frac{1}{2}]\cup[\frac{2}{3};+\infty\rangle$

Clave C

31. De la ecuación:

$$\underbrace{|\sqrt{x}+2|}_{(+)}+|\sqrt{x}-2|=\underbrace{|5\sqrt{x}+2|}_{(+)}$$

Luego:

$$\sqrt{x}+2+|\sqrt{x}-2|=5\sqrt{x}+2$$
$$|\sqrt{x}-2|=4\sqrt{x}$$

Por teorema:

$$\sqrt{x}-2=4\sqrt{x}\ \vee\ \sqrt{x}-2=-4\sqrt{x}$$
$$\underbrace{\sqrt{x}=-\frac{2}{3}}_{\text{(absurdo)}}\ \vee\ \sqrt{x}=\frac{2}{5}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{x}=\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{4}{25}$$

$$CS=\left\{\frac{4}{25}\right\}$$

Clave B

32. De la ecuación:

$(x-3)^2-40=3|x-3|$

Sabemos:

$x^2=|x|^2$

Luego:

$$|x-3|^2-3|x-3|-40=0$$

$|x-3|$ ⟶ -8

$|x-3|$ ⟶ 5

$$\underbrace{(|x-3|-8)}_{=0}\underbrace{(|x-3|+5)}_{\neq 0}=0$$

$$|x-3|-8=0\Rightarrow|x-3|=8$$
$$x-3=8\ \vee\ x-3=-8$$
$$x_1=11\ \vee\ x_2=-5$$
$$\Rightarrow N=\{11;-5\}$$

Nos piden:

$11^2+(-5)^2=146$

Clave D

Resolución de problemas

33. La expresión se puede escribir como:

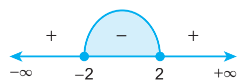
$$\sqrt{|x+2|}(x+2)=3\sqrt{x^2}\sqrt{4-x^2}$$
$$\sqrt{|x+2|}(x+2)=3|x|\sqrt{4-x^2}$$

B) Restricciones:

La primera raíz $\Rightarrow$ no hay

La segunda raíz $\Rightarrow 4-x^2\geq 0$

$$x^2-4\leq 0$$
$$(x+2)(x-2)\leq 0$$
$$x\in(-2;2)$$
$$\Rightarrow CVA=x\in(-2;2)$$



B) Desarrolla la expresión (solución parcial).

$$\sqrt{|x+2|}(x+2)=3|x|\sqrt{4-x^2}\qquad ...(1)$$

El universo de trabajo: CVA = $x\in(-2;2)$

$\Rightarrow\ x\geq -2\ \wedge\ x\leq 2$

$x+2\geq 0\ \wedge\ 2-x\geq 0$

Donde:

$|x+2|=x+2$ y $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}$

Luego queda:

$$\sqrt{x+2}(x+2)=3|x|\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}$$
$$\Rightarrow\sqrt{x+2}(x+2)-3|x|\sqrt{2-x}\sqrt{x+2}=0$$
$$\sqrt{x+2}(x+2-3|x|\sqrt{2-x})=0$$
$$\sqrt{x+2}=0\ \vee\ x+2-3|x|\sqrt{2-x}=0$$
$$x=-2\ \vee\ x+2=3|x|\sqrt{2-x}$$

Resolvemos la 2.ª ecuación:

$$x+2=3|x|\sqrt{2-x}\qquad ...(2)$$

Como: $x+2\geq 0\Rightarrow$ el lado derecho es ≥ 0

Elevamos al cuadrado a (2):

$$(x+2)^2=9|x|^2(\sqrt{2-x})^2$$
$$x^2+4x+4=9x^2(2-x)$$
$$=18x^2-9x^3$$
$$9x^3-17x^2+4x+4=0$$

	9	−17	4	4
1		9	−8	−4
	9	−8	−4	0

$$\Rightarrow (x-1)(9x^2-8x-4)=0$$
$$x=1\ \vee\ 9x^2-8x-4=0$$
$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(9)(-4)}}{2(9)}$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{2^2.4^2+4^2.9}}{2(9)}$$
$$x=\frac{8\pm 4\sqrt{13}}{2(9)}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{9}$$

El conjunto solución (CS) final es:

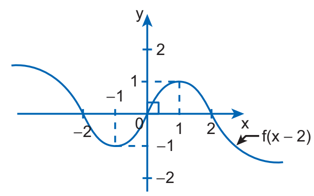
$$CS=\left\{-2;1;\frac{4+2\sqrt{13}}{9};\frac{4-2\sqrt{13}}{9}\right\}$$

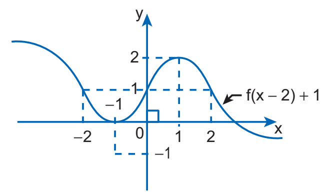
Nos piden la suma de los elementos del CS:

$$\Sigma\text{ soluciones}=-2+1+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\sqrt{13}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\sqrt{13}$$
$$=\frac{8}{9}-1=-\frac{1}{9}$$
$$\therefore\Sigma\text{ soluciones}=-\frac{1}{9}$$

Clave C

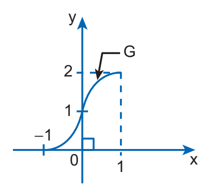
34.



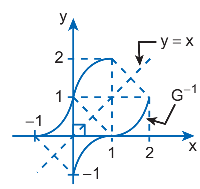


Como: $-1\leq x\leq 1$

$\Rightarrow$ G = |F(x − 2) + 1| es:



Luego G^{-1} es:



Clave C

LOGARITMOS

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 96) Unidad 4

Comunicación matemática

1. I. $\operatorname{colog}_{0,1}100\,000\,000 = -\log_{10^{-1}}10^8$

$= \dfrac{-8}{-1}\log_{10}10$

$= 8$ (V)

II. $\operatorname{logantilog}_7\operatorname{colog}_7(-10)$

Por definición:

$\operatorname{colog}_a b = -\log_a b,\ a \wedge b > 0;\ a \neq 1$

Como: $b = -10$, entonces la proposición es falsa. (F)

III. Los logaritmos de números reales positivos, en general resultan ser cualquier número real (positivo, negativo o cero). (F)

IV. $\log x - \log y = \log(x - 1/y)$

$\log(x/y) = \log(x - 1/y)$

$\dfrac{x}{y} = x - \dfrac{1}{y}$

$1 = y - \dfrac{1}{x}$

La igualdad se verifica cuando la diferencia entre un número y la inversa del otro sea igual a la unidad. (V)

Solo III es falsa.

Clave B

2.

Razonamiento y demostración

3. De la expresión:

$5^{\log_x(x^2-5x+15)} = 3^{\log_x 25}$

Sacamos logaritmos a ambos miembros:

$\log_x(x^2 - 5x + 15).\log 5 = \log_x 25.\log 3$

$\log_x(x^2 - 5x + 15).\log 5 = \dfrac{2\log 5}{\log x}\,.\log 3$

$\log_x(x^2 - 5x + 15) = \dfrac{2\log 3}{\log x} = \dfrac{\log 9}{\log x}$

$\log_x(x^2 - 5x + 15) = \log_x 9$

Donde:

$x^2 - 5x + 15 = 9$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x \quad -3$

$x \quad -2$ $\Big\}$ $x = 3 \ \vee\ x = 2$

Piden la suma de los valores de x:

$2 + 3 = 5$

Clave A

4. $f(x) = \log_a x;\ a > 0$ y $a \neq 1$

Luego:

$b = f(a) = \log_a a \Rightarrow b = 1$

Además:

$f(a + 2) = b + 1$

$\log_a(a + 2) = 2 \Rightarrow a + 2 = a^2$

$a^2 - a - 2 = 0$

$a \quad -2$

$a \quad +1$

$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0$

$a = 2 \ \vee\ a = -1\ (a > 0) \Rightarrow a = 2$

$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$

Clave D

5. $\log_{x-8}(x^2 - 16) = 2$

- $x^2 - 16 > 0 \Rightarrow x^2 > 16$

  $x > 4 \ \vee\ x < -4$ $\quad ...S_1$

- $x - 8 > 0 \ \wedge\ x - 8 \neq 1$

  $x > 8 \ \wedge\ x \neq 9$ $\quad ...S_2$

  $S_1 \cap S_2: x \in \langle 8; +\infty\rangle - \{9\}$ $\quad ...(\alpha)$

Resolvemos:

$\log_{x-8}(x^2 - 16) = 2$

$x^2 - 16 = (x - 8)^2$

$x^2 - 16 = x^2 - 16x + 64$

$16x = 80$

$x = 5$

No cumple con (α).

$\therefore\ x \in \varnothing$

Clave D

6. Sabemos que:

$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})\dfrac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1}$

Nos piden:

$\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}) = \log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1}$

Reemplazamos:

$\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1} = -1$

Clave C

7. $A = \dfrac{1}{1 + \log_a bc} + \dfrac{1}{1 + \log_b ac} + \dfrac{1}{1 + \log_c ab}$

Entonces:

$A = \dfrac{1}{\log_a a + \log_a bc} + \dfrac{1}{\log_b b + \log_b ac} + \dfrac{1}{\log_c c + \log_c ab}$

$A = \dfrac{1}{\log_a abc} + \dfrac{1}{\log_b abc} + \dfrac{1}{\log_c abc}$

$\Rightarrow A = \log_{abc}a + \log_{abc}b + \log_{abc}c$

$\therefore\ A = \log_{abc}a.b.c = 1$

Clave A

8. $\log_3\sqrt[4]{729\sqrt[3]{9^{-1}.27^{-\frac{4}{3}}}}$

$= \log_3\sqrt[4]{3^6.\sqrt[3]{3^{-2}.\,3^{-4}}} = \log_3\sqrt[12]{3^{12}}$

$= \log_3 3 = 1$

Clave B

9. $M = \log_4 49.\log_5 2\log_{27}125.\log_{\sqrt{7}}3$

$M = \log_{\sqrt{4}}\sqrt{49}\ \log_5 2\log_{\sqrt[3]{27}}\sqrt[3]{125}\,.\log_{(\sqrt{7})^2}(3)^2$

$\Rightarrow M = 2\log_2 7\ .\ \log_5 2\ .\ \log_3 5\ .\ \log_7 3$

$\therefore M = 2\log_3 3 = 2$

Clave B

Resolución de problemas

10. Trabajando con la inecuación:

- Asignemos un valor A: $A = \sqrt{x + 1}$

  $\Rightarrow\ x = A^2 - 1$

- Reemplazamos en la inecuación:

  $\log_6(A^2 - 3A + 2) < 1$

  $\Rightarrow\ 0 < A^2 - 3A + 2 < 6$

  $\Rightarrow\ 0 < A^2 - 3A + 2\ \wedge\ A^2 - 3A + 2 < 6$

  $\Rightarrow\ 0 < (A - 1)(A - 2) \wedge (A - 4)(A + 1) < 0$

  $(+)$

  $\Rightarrow\ (A < 1 \vee A > 2) \vee (A < 4)$, como $A \geq 0$

  $\Rightarrow\ (0 \leq A < 1 \vee A > 2) \vee (0 \leq A < 4)$

  $\Rightarrow\ (0 \leq A < 1 \vee 2 < A < 4)$

Luego, elevamos al cuadrado y operamos:

$-1 \leq x < 0\ \vee\ 3 < x < 15$

Finalmente el conjunto solución es:

$\{x\,/ -1 \leq x < 0\} \cup \{x\,/\,3 < x < 15\}$

Clave E

11. Cuando se tiene una progresión aritmética de 21 términos, el tercero y el decimonoveno son equidistantes y el decimoprimero es el término central; se debe cumplir:

$2\log_p n = \log_n m + \log_m p$ $\quad ...(1)$

Y considerando los términos de la progresión geométrica, se cumple:

$\left(\log^{\frac{1}{2}}{}_p n\right)^2 = \left(1 + \log^{\frac{1}{2}}{}_n m^{\frac{1}{2}}\right)\left(-1 + \log^{\frac{1}{2}}{}_n m^{\frac{1}{2}}\right)$

$\log_p n = \left(\log^{\frac{1}{2}}{}_n m^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1 = \log_n m^{\frac{1}{2}} - 1$

$= \dfrac{1}{2}\log_n m - 1$

Donde:

$2\log_p n = \log_n m - 2$ $\quad ...(2)$

De (1) y (2) obtenemos:

$\log_m p = -2$

$\Rightarrow\ p = m^{-2}\ \Rightarrow\ p^{-1} = m^2\ \Rightarrow\ m^2 p = 1$

Nos piden:

$\log_n(m^2p)^{100} = \log_n 1 = 0$

Clave A

Nivel 2 (página 97) Unidad 4

Comunicación matemática

12.

13.

Razonamiento y demostración

14. De la expresión:

$\dfrac{1 + \log_2(x - 4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})} = 1$

$1 + \log_2(x - 4) = \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})$

$\log_2 2 + \log_2(x - 4) = \log_2(x + 3 + x - 3 - 2\sqrt{x^2 - 9})$

$\log_2 2(x - 4) = \log_2(2x - 2\sqrt{x^2 - 9})$

$\Rightarrow 2x - 8 = 2x - 2\sqrt{x^2 - 9}$

$4 = \sqrt{x^2 - 9}$

$16 = x^2 - 9$

$\Rightarrow x = \pm\,5$

Cumple solo para $x = 5$.

Clave B

15. $\frac{1}{\log_{(x-2)}7} + \frac{1}{\log_{(x+1)}7} = \log_7 4$

Invirtiendo se tiene:

$\log_7(x-2) + \log_7(x+1) = \log_7 4$

$\log_7(x+1)(x-2) = \log_7 4$

$x^2 - x - 2 = 4$

$x^2 \;\; - x \;\; - 6 = 0$

$x \quad -3$

$x \quad\;\; 2$

$\Rightarrow x = 3 \;\;\vee\;\; x = -2$

Por definición:

$x - 2 > 0 \;\wedge\; x - 2 \neq 1$

$x > 2 \wedge x \neq 3$

Luego: $x \in \varnothing$

Clave E

16. $F = \dfrac{\log_{(\sqrt{3})}(5).\log_5 4.\log_4\sqrt{27}}{\log_{ab} n + \dfrac{1}{\log_{\frac{ab}{n}} ab}}$

$F = \dfrac{\log_{\sqrt{3}} 5 \log_5 \sqrt{27}}{\log_{ab} n + \log_{ab}\left(\dfrac{ab}{n}\right)}$

$F = \dfrac{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{27}}{\log_{ab} n\left(\dfrac{ab}{n}\right)} = \log_3 27 = \log_3 3^3$

$\therefore\; F = 3$

Clave C

17. $\log_{mn} m = 3 \Rightarrow m = (mn)^3$

$m = m^3n^3 \Rightarrow n^3 = m^{-2};\; mn = m^{\frac{1}{3}}$

Nos piden:

$\log_{mn}\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{m^7}} = \log_{\sqrt[3]{m}}\dfrac{\sqrt{m^{-2}}}{\sqrt[3]{m^7}}$

$\log_{m^{\frac{1}{3}}}\dfrac{m^{-1}}{m^{\frac{7}{3}}} = \log_{\sqrt[3]{m}} m^{-1-\frac{7}{3}}$

$\log_{\sqrt[3]{m}} m^{\frac{-10}{3}} = \dfrac{\frac{-10}{3}}{\frac{1}{3}}\log_m m = -10$

Clave B

18. $\log_n\left\{\log_n \sqrt[n-1]{n.\sqrt[-n]{n}}\right\} =$

$\log_n\left\{\log_n \sqrt[n(n-1)]{n^{n-1}}\right\} =$

$\log_n\{\log_n \sqrt[n]{n}\} = \log_n\left\{\dfrac{1}{n}\log_n n\right\}$

$\log_n \dfrac{1}{n} = \log_n n^{-1} = -1$

Clave D

19. $\dfrac{1}{\log_{bc} bc + \log_{bc} a} + \dfrac{1}{\log_{ac} ac + \log_{ac} b} + \dfrac{1}{\log_{ab} ab + \log_{ac} c}$

$E = \dfrac{1}{\log_{bc} bc\,.\,a} + \dfrac{1}{\log_{ac} ac\,.\,b} + \dfrac{1}{\log_{ab} ab\,.\,c}$

$E = \log_{abc} bc + \log_{abc} ac + \log_{abc} ab$

$E = \log_{abc}(bc\,.\,ac\,.\,ab) = \log_{abc}(abc)^2$

$\therefore E = 2$

Clave D

20. Simplificando:

$$\frac{x^{\frac{\log(\log x^{-1})}{\log x}} + y^{\frac{\log(\log y^{-1})}{\log y}} + z^{\frac{\log(\log z - 1)}{\log z}}}{\log(xyz)}$$

$$= \frac{x^{\log_x\left(\log\frac{1}{x}\right)} + y^{\log_y\left(\log\frac{1}{y}\right)} + z^{\log_z\left(\log\frac{1}{z}\right)}}{\log(xyz)}$$

$$= \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right) + \log\left(\frac{1}{y}\right) + \log\left(\frac{1}{z}\right)}{\log(xyz)}$$

$$= \frac{\log(xyz)^{-1}}{\log(xyz)} = -1$$

Clave B

Resolución de problemas

21. Trabajamos con la desigualdad:

- Aplicamos propiedades de desigualdades:

$\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{35}{8} > 0$

$x^2 - 6x + \frac{35}{4} > 0$

$\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) > 0$



$\therefore x \in \left\langle -\infty; \frac{5}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{2}; +\infty\right\rangle$

- Ahora, desarrollamos la desigualdad planteada en el problema:

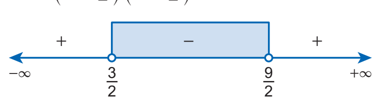
$\log_5\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{35}{8}\right) < 0 = \log_5 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{35}{8} < 1$

$\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{27}{8} < 0$

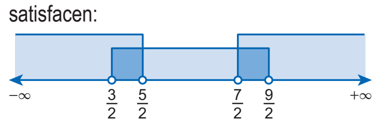
$x^2 - 6x + \frac{27}{4} < 0$

$\left(x - \frac{9}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0$

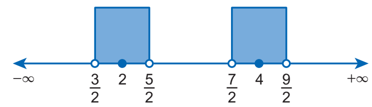


$\therefore x \in \left\langle \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right\rangle$

Luego, ambos gráficos deben intersecarse para encontrar los números x enteros que la satisfacen:



Finalmente, tenemos, por condición del problema, que $x \in \mathbb{Z}$:



$x = \{2; 4\}$

Nos piden la suma de todos los x enteros que satisfacen la desigualdad:

$2 + 4 = 6$

Clave C

22. Se asumirá que la razón de la progresión geométrica es 2^r, donde la progresión geométrica quedará representada como:

$m, n, p \;\Rightarrow\; m, m\,.\,2^r, m\,.\,2^{2r};\; r \in \mathbb{Z}^+$

Luego la progresión aritmética será representada como:

$\log_2 m;\; \log_2 m + r\; \log_2 m + 2r$

Hacemos el cambio de variable:

$\log_2 m = q \;\Rightarrow\; m = 2^q$

En la condición:

$7(\log_2 m)(\log_2 n)(\log_2 p) = 6(m + n + p)$

$7q(q + r)(q + 2r) = 6(2^q + 2^q 2^r + 2^q\,.\,2^{2r})$

$= 6\,.\,2^q(1 + 2^r + 2^{2r})$ ...(1)

Ya que (1) es una ecuación con 2 variables, probar con $r = 1$.

$7q(q + 1)(q + 2) = 6\,.\,2^q(1 + 2 + 2^2)$

$q(q + 1)(q + 2) = 6\,.\,2^q$

Resulta que: $q = 2$

$2(2 + 1)(2 + 2) = 6\,.\,2^2$

Entonces: $m = 2^2$

$m = 4$

Nos piden: $(2m + 1)^2 = (2(4) + 1)^2 = 81$

Clave D

Nivel 3 (página 98) Unidad 4

Comunicación matemática

23. Recuerda que para $0 < b < 1$

$b^x > b^y \iff x < y$

$\log_b x > \log_b y \;,\;\; 0 < x < y$

Tenemos que: $0 < b < 1$ y $a < c$

Luego

I. Verdadera

Como $a < c \;\Rightarrow\; b^a > b^c$

II. Falsa

Si $a > b^c \;\Rightarrow\; \log_b a < \log_b(b^c)$

$\log_b a < c$

III. Verdadera

Como $a < c \;\Rightarrow\; \log_b a > \log_b c$

Observación: a y c son positivos

Respuesta VFV

Clave B

24.

Clave D

Razonamiento y demostración

25. De la expresión:

$$\log_2 x - \log_{x^2} 256 = 3$$
$$\log_2 x - \log_x 16 = 3$$
$$\frac{1}{\log_x 2} - 4\log_x 2 = 3$$
$$1 - 4\log_x^2 2 = 3\log_x 2$$
$$4\log_x^2 2 + 3\log_x 2 - 1 = 0$$

$4\log_x 2 \qquad -1$

$\log_x 2 \qquad 1$

$$4\log_x 2 = 1 \Rightarrow \log_x 2 = \frac{1}{4}$$
$$2 = x^{1/4} \Rightarrow x = 16$$
$$\log_x 2 = -1 \Rightarrow 2 = x^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Piden el producto: $16 \times \frac{1}{2} = 8$

Clave E

26. $\left(\log_{b\sqrt{b}} x\right)^{-1} + \left(\log_{x^b} b\right)^{-1} = 2$

$$\left(\log_b x^b\right)^{-1} + \left(\log_x b^{\frac{1}{b}}\right)^{-1} = 2$$
$$\left(b\log_b x\right)^{-1} + \left(\frac{\log_x b}{b}\right)^{-1} = 2$$
$$\frac{1}{b\log_b x} + \frac{b}{\log_x b} = 2$$
$$\frac{\log_x b}{b} + \frac{b}{\log_x b} = 2$$
$$(\log_x b)^2 + b^2 = 2b\log_x b$$
$$(\log_x b)^2 - 2b\log_x b + b^2 = 0$$
$$(\log_x b - b)^2 = 0$$
$$\log_x b - b = 0 \Rightarrow \log_x b = b$$

Luego: $x^b = b \Rightarrow x = \sqrt[b]{b}$

Clave C

27. Del sistema:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 8 & \text{...(I)} \\ x^{\log y} = 10^7 & \text{...(II)} \end{cases}$$

Tomamos log en (II):

$$\log x^{\log y} = \log 10^7$$
$$\log x \log y = 7 \qquad \text{...(III)}$$

(I) $\times$ logy:

$$\underbrace{\log x \log y}_{7} + (\log y)^2 = 8\log y$$
$$(\log y)^2 - 8\log y + 7 = 0$$

$\log y \qquad -7$

$\log y \qquad -1$

$\log y = 7 \quad \vee \quad \log y = 1$

$y = 10^7 \quad \vee \quad y = 10$

En (III):

Para: $\log y = 7$

$\Rightarrow 7\log x = 7 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$

Para: $\log y = 1$

$\Rightarrow (1)\log x = 7 \Rightarrow \log x = 7$

$\Rightarrow x = 10^7$

Entonces:

(*) $\frac{x}{y} = \frac{10}{10^7} = 10^{-6}$

(*) $\frac{x}{y} = \frac{10^7}{10} = 10^6$

Clave C

28. $\text{anti}\log_{\sqrt[3]{3}}\left(\log_{\sqrt{2}}\left(\text{anti}\log_{\sqrt[4]{2}}\left(\text{co}\log_{\sqrt[6]{2}} 8\right)\right)\right)$

$$\sqrt[3]{3}^{\left(\log_{\sqrt{2}}\left(\text{anti}\log_{\sqrt[4]{2}}\left(-\log_{2^{1/6}} 2^3\right)\right)\right)}$$
$$\sqrt[3]{3}^{\left(\log_{\sqrt{2}}\left(\text{anti}\log_{\sqrt[4]{2}}\left(\log_2 2^{-18}\right)\right)\right)}$$
$$\sqrt[3]{3}^{\left(\log_{\sqrt{2}}\left(\text{anti}\log_{\sqrt[4]{2}}(-18)\right)\right)}$$
$$\sqrt[3]{3}^{\left(\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt[4]{2}^{-18}\right)\right)}$$
$$\sqrt[3]{3}^{\left(\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}^{-9}\right)} = \sqrt[3]{3}^{-9} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

Clave C

29. De la inecuación:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > -2$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} > x - 5$$
$$x - 5 < 4 \Rightarrow x < 9 \qquad \text{...(I)}$$

Además:

$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$ ...(II)

De (I) $\cap$ (II):

$5 < x < 9$

$x \in \langle 5; 9\rangle$

Clave B

30. $E = \log_{0,\hat{6}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{12}}\right) + \log_{\left(\frac{3}{5}\right)}\left(\sqrt[3]{\frac{9}{15}}\right)^{-1} + \log_{0,5}\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{4}}}$

$$E = \log_{\left(\frac{6}{9}\right)}\left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) + \log_{\left(\frac{3}{5}\right)}\sqrt[3]{\frac{5}{3}} + \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{4}}}$$
$$E = \log_{\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \log_{\left(\frac{3}{5}\right)}\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} + \log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{6}}$$
$$E = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$$

Clave A

31. $A = \log(\text{antilog}_4(\log_2 20 - 1))$

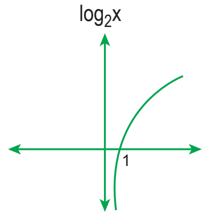
$$A = \log(\text{antilog}_4(1 + \log_2 10 - 1))$$
$$A = \log(\text{antilog}_4 \log_2 10)$$
$$A = \log(4^{\log_2 10}) = \log(2^{\log_2 10})^2$$
$$A = \log 10^2 \Rightarrow A = 2$$

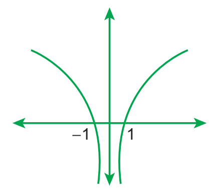
Clave B

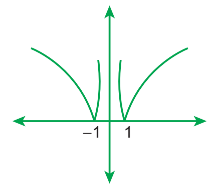
Resolución de problemas

32. Del problema tenemos: $|\log_2|x|| = 5 - x^2$

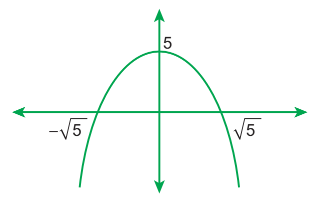
Graficamos $|\log_2|x||$:



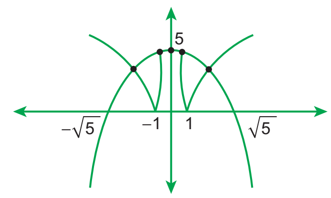




Graficamos $5 - x^2$:



Intersecamos ambas gráficas:



Luego:

n.° de intersecciones = n.° de soluciones

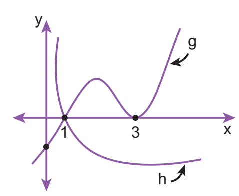
n.° de soluciones = 4

Clave D

33. Sea:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = \frac{1}{\log_x\left(\frac{3}{5}\right)} \wedge x > 0;\ x \neq 1$$
$$\Rightarrow \underbrace{(x-1)(x-3)^2}_{g(x)} = \underbrace{\log_{\left(\frac{3}{5}\right)} x}_{h(x)} \wedge x > 0;\ x \neq 1$$

Graficamos las funciones:



Luego, según la gráfica no se cortan en ningún punto.

Por lo tanto, S es vacío.

Clave A

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 101) Unidad 4

Comunicación matemática

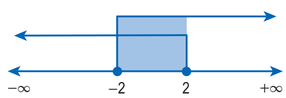
1. a) Función real
b) Una relación
c) Rango
d) Función identidad
e) Eje y
f) $f(4) = 3$
$f(0) = -0$
$f(-5) = -4$
$f(g(7)) = f(-5) = -4$
$g(4) = 10$
$g(7) = -5$
$Dom(f) = [-5; 4]$
$Dom(g) = \{4; 7\}$

2. a) (V)
b) (F), una recta vertical la interseca en más de un punto.
c) (V)
d) (V)
e) (F), es simétrica al eje y.

Razonamiento y demostración

3. $F(x) = \sqrt[4]{2+x} + \sqrt[6]{2-x}$

Para que la función esté bien definida se debe tener:
$2 + x \geq 0 \quad \wedge \quad 2 - x \geq 0$
$x \geq -2 \quad \wedge \quad x \leq 2$



Luego de intersectar:
$Dom(F) = [-2; 2]$
Nos piden el número de valores enteros:
$-2; -1; 0; 1; 2$
$\therefore$ Hay 5 números enteros.

Clave C

4. F es función.
$F = \{(1; x), (2; 5), (3; \sqrt{2}), (1; 6), (5; 5)\}$
Se cumple: $x = 6$
$\Rightarrow F = \{(1; 6), (2; 5), (3; \sqrt{2}), (5; 5)\}$
Nos piden:
$[F(3)]^{F(1)} + 1 = (\sqrt{2})^6 + 1 = 9$

Clave B

5. $y = \dfrac{x+2}{x-5} \Rightarrow yx - 5y = x + 2$
$x(y - 1) = 2 + 5y$
$x = \dfrac{2+5y}{y-1}$

$y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$
$\therefore Ran(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Clave B

6. $F(x) = \begin{cases} 4x + 5; & x < 0 \quad ...(I) \\ 3x - 4; & x \geq 0 \quad ...(II) \end{cases}$

$x = 1$ en (II):
$F(1) = 3(1) - 4 = -1$
$x = -1$ en (I):
$F(-1) = 4(-1) + 5 = 1$
$x = 0$ en (II):
$F(0) = 3(0) - 4 = -4$
$x = -4$ en (I):
$F(-4) = 4(-4) + 5 = -11$
Nos piden:
$F[\underbrace{F(1)}_{-1}] - F[\underbrace{F(0)}_{-4}] =$

$\underbrace{F(-1)}_{1} - \underbrace{F(-4)}_{-11} = 1 - (-11) = 12$

Clave E

7. Dada la función:
$F(x) = \sqrt{x - 2005}$
Sabemos que:
$x - 2005 \geq 0$
$x \geq 2005$
$\therefore Dom(F) = [2005; +\infty\rangle$

Clave B

8. Dada:
$F(x) = \dfrac{x - |x|}{x}$
(*) Si $x > 0$
$F(x) = \dfrac{x - x}{x} = 0$
(*) Si $x < 0$
$F(x) = \dfrac{x - (-x)}{x} = 2$
Luego:
$F(x) = \begin{cases} 0; & x > 0 \\ 2; & x < 0 \end{cases}$

$Dom(F) = \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$
$Ran(F) = \{0; 2\}$
Nos piden:
$Dom(F) \cap Ran(F) = \{2\}$

Clave A

9. $F(x) = x^2 - 6x + 5; x \in \mathbb{R}$
$F(x) = x^2 - 6x + 9 - 4$
$F(x) = (x - 3)^2 - 4$
Como: $(x - 3)^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
$(x - 3) - 4 \geq - 4$
$\therefore\ Ran(F) = [-4; +\infty\rangle$

Clave D

Resolución de problemas

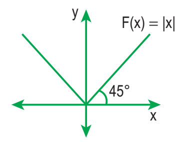
10. $F = \{(a; b), (3; c), (1; 3), (2b; 4)\}$
$F(x) = x - 2a \quad ...(I)$
Sea $x = 1 \Rightarrow F(1) = 1 - 2a = 3$
$a = -1$
Sea: $x = a \Rightarrow F(a) = a - 2a = b$
$b = -a = -(-1) = 1$
Sea $x = 3 \Rightarrow F(3) = 3 - 2a = c$
$3 - 2(-1) = c \Rightarrow c = 5$
Reemplazando:
$F = \{(-1; 1); (3; 5); (1; 3); (2; 4)\}$
$Dom(F) = \{-1; 3; 1; 2\}$
$Ran(F) = \{1; 5; 3; 4\}$
$Dom(F) \cap Ran(F) = \{1; 3\}$
$\therefore$ Nos piden: $1 . 3 = 3$

Clave B

11. $F(x) = x \quad ...(I)$
$G(x) = |x| \quad ...(II)$

$G(x) = |x|$
$\Rightarrow F(G(x)) = F(|x|)$; de (I): $F(|x|) = |x|$

Graficamos:



Clave E

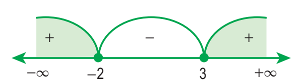
12. Como F es una función lineal:
$\Rightarrow F(x) = ax + b$
Datos:
$F(1) = 2 \Rightarrow F(1) = a + b = 2 \quad ...(I)$
$F(2) = 1 \Rightarrow F(2) = 2a + b = 1 \quad ...(II)$
De (I) y (II):
$a = -1 \wedge b = 3$
$\Rightarrow F(x) = -x + 3$

Nos piden:
$F(20) + F(-18) = -20 + 3 + -(-18) + 3$
$F(20) + F(-18) = 4$

Clave D

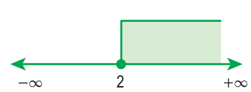
13. Para hallar el dominio de f(x) factorizamos:
$\sqrt{x^2 - x - 6} \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x-3)(x+2)}$
$f(x) \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow (x - 3)(x + 2) \geq 0$

Por desigualdades:

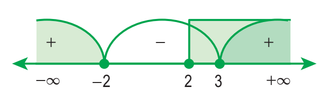


$\Rightarrow Domf(x) = \langle -\infty; -2] \cup [3; +\infty\rangle$

Para hallar el rango de g(x) sabemos:
$|x - 3| \geq 0$
$|x - 3| + 2 \geq 2$
$\Rightarrow Rang(x) = [2; +\infty\rangle$



$\therefore$ Intersectamos:



$Domf(x) \cap Rang(x) \in [3; \infty\rangle$

Clave A

Nivel 2 (página 102) Unidad 4

Comunicación matemática

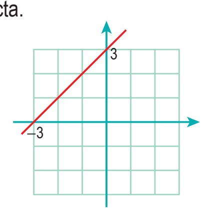
14.

15. a)

x	y
0	3
–3	0

$\Rightarrow$ punto (0; 3); $\Rightarrow$ punto (–3; 0) } interceptos con los ejes

Ubicamos los puntos (0; 3) y (–3; 0) y unimos con una recta.



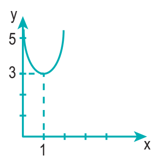
b) $a = 2 \Rightarrow a > 0$ se abre hacia arriba

Vértice: $\left(\dfrac{-\boxed{-4}}{2.\boxed{2}}; y(h)\right) = (\boxed{1}; y(1))$

$h = \boxed{1}$

$k = 2(1)^2 - 4(1) + 5) = \boxed{3}$

Esbozamos la gráfica cuyo vértice es (1; 3).



Razonamiento y demostración

16. Como f es una función se debe cumplir lo siguiente:

- $2a^2 - b = 5$ ...(1)
- $b - a^2 = 4$ ...(2)

De (1) y (2): $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \vee a = -3$

Como: $b - a^2 = 4$

$b - 9 = 4 \Rightarrow b = 13$

Por lo tanto:

$a = 3 \wedge b = 13$ o $a = -3 \wedge b = 13$

Clave E

17. $F = \{(5; 7a + 2b), (2; 5), (2; a + 2), (5; 5b - 2a)\}$

- $7a + 2b = 5b - 2a$
  $9a = 3b$
  $3a = b$
- $a + 2 = 5$
  $a = 3 \Rightarrow b = 9$

Luego:

$F = \{(2; 5), (5; 39)\}$

Nos piden:

$F(2) + F(F(2)) = 5 + F(5) = 5 + 39 = 44$

Clave D

18. $F = \{(0; 1), (1; 2), (2; 3)\}$

$\therefore F(0)^{F(1)} + F(1)^{F(2)} + F(2)^{F(0)} = 12$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$(1)^2 + (2)^3 + (3)^1$

Clave E

19. $F(x) = x^2 + 4x + 7; x \in \mathbb{R}$

$F(x) = \underbrace{x^2 + 4x + 4} + 3$

$F(x) = (x + 2)^2 + 3$

Sabemos: $(x + 2)^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$\underbrace{(x + 2)^2 + 3 \geq 3}$

$F(x) \geq 3$

$\therefore$ Ran(F) = $[3; +\infty\rangle$

Clave B

20. $F(x) = ax^2 + bx + c$; a; b; $c \in \mathbb{R}$

Dato:

$F(3) = F(-2) = 0$; $F(4) = 12$

Sea: x = 3

$F(3) = 9a + 3b + c = 0$ ...(I)

Sea: x = –2

$F(-2) = 4a - 2b + c = 0$ ...(II)

Sea: x = 4

$F(4) = 16a + 4b + c = 12$ ...(III)

(I) – (II): $5a + 5b = 0 \Rightarrow b = -a$

En (I): $9a + 3(-a) + c = 0$

$c = -6a$

En (III): $16a + 4(-a) - 6a = 12$

$6a = 12 \Rightarrow a = 2$

$b = -2$

$c = -6(2)$

$= -12$

Nos piden: F(2)

$\therefore F(2) = 2(2)^2 - 2(2) - 12 = -8$

Clave B

21. $F(x) = \sqrt{|x - 2| - 3}$

Analizando se tiene:

$|x - 2| - 3 \geq 0 \Rightarrow |x - 2| \geq 3$

Por teorema:

$x - 2 \geq 3 \vee x - 2 \leq -3$

$x \geq 5 \vee x \leq -1$

Ran(F) = $\langle -\infty; -1] \cup [5; +\infty\rangle$

Clave E

22. De la gráfica de $f(x) = mx^3 + n$

Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = n = m$ ...(I)

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = m + n = 2$ ...(II)

Reemplazando (I) en (II):

$2n = 2$

$n = 1 \Rightarrow m = 1$

Nos piden:

$mn = (1)(1) = 1$

Clave B

Resolución de problemas

23. La función es una parábola cuyo vértice (h; k) es (–2; 1) y el punto(0; 9) $\in$ f(x)

Siendo $f(x) - k = a(x - h)^2$ la ecuación equivalente a: $y - k = a(x - h)^2$ ... (I)

$\downarrow$ 1 $\quad \downarrow$ –2 (del gráfico)

Para determinar el valor de **a** evaluamos el punto (0; 9) que $\in$ f(x).

$9 - (1) = a((0) - (-2))^2$

$\Rightarrow a = 2$

En (I): $y - 1 = 2(x - (-2))^2$

$y - 1 = 2(x + 2)^2 \Rightarrow y = 2x^2 + 8x + 9$

Clave D

24. Graficamos $f(x) = x^2 - 6x + 11$

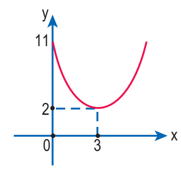
$a = 1; b = -6$

$\Rightarrow V(h; k) = \left(-\dfrac{b}{2a}; f(k)\right) = \left(\dfrac{6}{2}; f(3)\right) = (3; f(3))$

$\Rightarrow$ V(h; k) = (3;2); punto de intersección

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 11$

Graficamos:



$\Rightarrow$ De la gráfica: $f(x) \geq 2$

$\therefore k = 2$

Clave C

25. De la gráfica:

$F(x) = 18 - |x - 8|$

Hallando los puntos de intersección de F(x):

Con G(x) = 10:

$\Rightarrow F(x) = 10 = 18 - |x - 8|$

$\Rightarrow |x - 8| = 8$

$x - 8 = 8 \vee -(x - 8) = 8$

$x = 16 \vee x = 0$

Con el eje x:

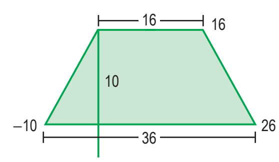
$\Rightarrow F(x) = 0 = 18 - |x - 8|$

$\Rightarrow |x - 8| = 18$

$x - 8 = 18 \vee -(x - 8) = 18$

$x = 26 \vee x = -10$

Ubicamos los puntos (0; x) hallados.



$S_{\square} = 10\left(\dfrac{36 + 16}{2}\right) = 260$

Clave C

Nivel 3 (página 103) Unidad 4

Comunicación matemática

26. La falsa es la D, una recta horizontal la corta en más de un punto.

27.

Razonamiento y demostración

28. Datos:

$F(a + b) = F(a) + F(b) \wedge F(1) = 2$

(*) Si a = b = 1

$F(1 + 1) = F(1) + F(1)$

$F(2) = 2F(1) = 2(2) = 4$

(*) Si a = b = 2

$F(2 + 2) = F(2) + F(2)$

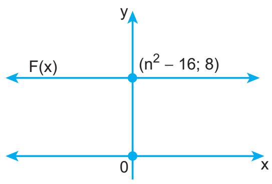
$F(4) = 2F(2) = 2(4) = 8$

Nos piden:

$F(n+2) - F(n+4) = F(n) + F(2) - (F(n) + F(4))$
$= F(2) - F(4)$
$= 4 - 8$
$= -4$

Clave D

29. De la gráfica:



Se observa que:
$n^2 - 16 = 0 \Rightarrow n = \pm 4$
Luego:
$F(x) = 8$
$F(5) = 8$
$F(109) = 8$
Nos piden:

$$\frac{F(5)+n}{F(109)-2} = \frac{8 \pm 4}{8-2} = \frac{8 \pm 4}{6} = \frac{4 \pm 2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{F(5)+n}{F(109)-2} = 2 \ \vee \ \frac{F(5)+n}{F(109)-2} = \frac{2}{3}$$

Uno de los valores de $\frac{F(5)+n}{F(109)-2}$ es 2.

Clave B

30. $F(x) = \dfrac{\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}}{x^2 - 4}$

Analizando se tiene:
$x + 5 \geq 0 \wedge 5 - x \geq 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0$
$x \geq -5 \wedge x \leq 5 \wedge x \neq \{-2; 2\}$

$Dom(F) = [-5; 5] - \{-2; 2\}$
Elementos enteros del Dom(F):
$\{-5; -4; -3; -1; 0; 1; 3; 4, 5\}$
$\therefore$ tiene 9 elementos.

Clave C

31. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1; & -3 \leq x < 0 \\ x^2 + 1; & 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

(*) Sea $F_1(x) = 2x + 1$
Como: $-3 \leq x < 0$

Multiplicando por 2: $-6 \leq 2x < 0$
Sumando 1:
$-5 \leq \underbrace{2x + 1}_{F_1(x)} < 1$

$\Rightarrow Ran(F_1) = [-5; 1\rangle$
(*) Sea $F_2(x) = x^2 + 1$
Como: $0 \leq x < 3$
Elevando al cuadrado: $0 \leq x^2 < 9$
Sumando 1:
$1 \leq \underbrace{x^2 + 1}_{F_2(x)} < 10$

$\Rightarrow Ran(F_2) = [1; 10\rangle$
Luego:
$Ran(F) = Ran(F_1) \cup Ran(F_2)$
$= [-5; 1\rangle \cup [1; 10\rangle$
$\therefore Ran(F) = [-5; 10\rangle$

Clave E

Resolución de problemas

32. Dada la función:
$F(x) = ax + b$ ...(I)
Además:
$F(x+1) - 2F(x) = x$ ...(II)
En (I): $x \rightarrow x + 1$
$F(x+1) = a(x+1) + b$
Reemplazando en (II):
$ax + a + b - 2(ax + b) = x$
$-ax + a - b = x$

Luego:
$a = -1 \wedge a - b = 0$
$\Rightarrow a = b = -1$
Nos piden:

$$\frac{a-b}{7} = \frac{(-1)-(-1)}{7} = 0$$

Clave C

33. Se observa del gráfico que es una función valor absoluto invertida.
$\Rightarrow a < 0$, el vértice es (2; 3)
$\Rightarrow b = 2$ y $c = 3$

Luego:
$f(x) = a|x - 2| + 3$
$(0; -1) \in f(x) \Rightarrow -1 = a|0 - 2| + 3$
$-4 = 2a \Rightarrow a = -2$
$(x_0; -5) \in f(x) \Rightarrow -5 = -2|x_0 - 2| + 3$
$\Rightarrow |x_0 - 2| = 4$
$x_0 - 2 = 4 \quad \vee \quad x_0 - 2 = -4$
$x_0 = 6 \qquad\qquad x_0 = -2$

De donde: $x_0 = 6$

$$\therefore \frac{x_0}{abc} = \frac{6}{-2.2.3} = -\frac{1}{2}$$

Clave D

34. Recordar:
Si f es una función decreciente y continua en un intervalo $\langle a; b\rangle$, se cumple:
$Ran(f) = \langle f(b); f(a)\rangle$
En el ejercicio:
$f(x) = \dfrac{ax + b}{x - 2}$; $Dom(f) = \langle 3; 10\rangle$

Como f es decreciente y continua:
$Ran(f) = \langle f(10); f(3)\rangle$

Por dato:
$Ran(f) = \left\langle \dfrac{27}{8}; 6 \right\rangle$

Identificando:
$f(10) = \dfrac{27}{8} \quad \wedge \quad f(3) = 6$

$\Rightarrow f(10) = \dfrac{10a + b}{10 - 2} = \dfrac{27}{8}$

$10a + b = 27$ ...(I)

$f(3) = \dfrac{3a + b}{3 - 2} = 6$

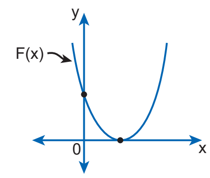
$3a + b = 6$ ...(II)

Resolviendo (I) y (II):
$a = 3 \wedge b = -3$

Nos piden:
$b + a = -3 + 3 = 0$

Clave E

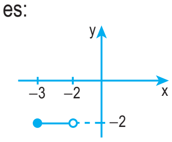
35. Dada $F(x) = x^2 - bx + b + 15$ y su gráfica:



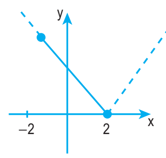
De la gráfica, se observa que:
$F(x) = x^2 - bx + b + 15 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \Delta = (-b)^2 - 4(1)(b + 15) = 0$
$b^2 - 4b - 60 = 0 \Rightarrow b^2 - 4b = 60$
Nos piden:
$(b - 2)^2 = b^2 - 4b + 4 = 64$

Clave C

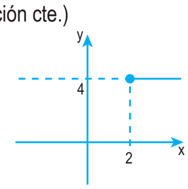
36. Para $x \in [-3; -2\rangle \Rightarrow -3 + 1 \leq x + 1 < -2 + 1$
$-2 \leq [\![x + 1]\!] < -1$
$\Rightarrow f(x) = [\![x + 1]\!] = -2$
Cuya gráfica es:



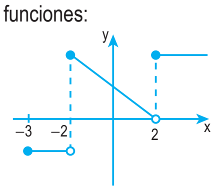
Para $x \in [-2; 2\rangle \Rightarrow -2 \leq x < 2$
$f(x) = |x - 2| \Rightarrow -4 \leq x - 2 < 0$
$0 < |x - 2| \leq 4$



Para $x \in [2; +\infty\rangle$
$f(x) = 4$ (función cte.)



Unimos las funciones:



37. $h(t) = 2(10t - t^2)$
$h(t) = -2(\underbrace{t^2 - 10t + 25}_{(t-5)^2} - 25)$

$h(t) = 50 - \underbrace{2(t - 5)^2}_{\text{mínimo}}$

h(t) es máxima cuando $2(t - 5)^2$ es mínimo, es decir cuando $2(t - 5)^2 = 0$
$\therefore t = 5$ segundos

Clave E

PROGRESIONES

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 107) Unidad 4

Comunicación matemática

1. I. La serie sigue una PG de razón q = 2

$\Rightarrow t_{10} = t_1 q^{10-1}$

$\therefore t_{10} = \pi r^2 . (2)^9 = 512\pi r^2$

II. $t_7 = \pi r^2 (2)^{7-1} = 64\pi r^2$

III. $S_{10} = \dfrac{t_1(q^n - 1)}{q-1} = \dfrac{\pi r^2(2^{10}-1)}{1} = 1023\pi r^2$

2. A) $6; 9; \frac{27}{2}; ...$

Se observa que es una PG:

$q = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2} \qquad t_6 = 6\left(\dfrac{3}{2}\right)^5$

$S_6 = 6\left(\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right)$

B) $\dfrac{SL_1}{SL_2} = \dfrac{\dfrac{2}{1-\frac{1}{4}}}{\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} = \dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{16}{3}$

Razonamiento y demostración

3. r: razón aritmética 4; 2; 0 (−2, −2)

r = – 2

q: razón geométrica $\sqrt{2}; 2; \sqrt{8}$ ($\times\sqrt{2}$, $\times\sqrt{2}$)

$q = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{r.q}{\sqrt{2}} = \dfrac{-2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2$

Clave C

4. Como es una PA, entonces:

$8 - m - (-2m) = -2m - m$

$m + 8 = -3m$

$m = -2$

$\Rightarrow$ La PA es: –2; 4; 10; ... de razón r = 6

$\Rightarrow t_{10} = -2 + (9)6$

$\therefore t_{10} = 52$

Clave D

5. PA: $t_3 + t_6 = 57$ ...(I)

$t_5 + t_{10} = 99$ ...(II)

Recuerda:

$t_n = t_1 + (n-1)r$

Luego:

De (I): $t_1 + 2r + t_1 + 5r = 57$

$2t_1 + 7r = 57$ ...(α)

De (II):

$t_1 + 4r + t_1 + 9r = 99$

$2t_1 + 13r = 99$ ...(β)

β – α:

$6r = 42 \Rightarrow r = 7$

Luego:

$r \in \left\langle \frac{13}{2}; 9 \right\rangle$

Clave D

6. : x – 5; x + 11; 2x – 3; 5y – 2; ... (r, r, r)

$x + 11 - (x-5) = 2x - 3 - (x + 11)$

$16 = x - 14$

$\Rightarrow x = 30$

Luego, la PA sería:

: 25; 41; 57; 5y – 2 (+16, +16, +16)

$5y - 2 = 73 \Rightarrow y = 15 \qquad \therefore \dfrac{x}{y} = 2$

Clave B

7. 57; –; –; –; –; 82 (4 medios aritméticos)

$r = \dfrac{82-57}{4+1} = 5$

La PA sería:

57; 62; 67; 72; 77; 82

(67: 3.er término)

Clave E

Resolución de problemas

8. :: 7; 14; ...; (q = 2)

$t_n . t_{n+1} = 25\,088$

$7 . 2^{n-1} . 7 . 2^n = 25\,088$

$49 . 2^{2n-1} = 25\,088$

$2^{2n-1} = 512 = 2^9$

$2n - 1 = 9 \Rightarrow n = 5$

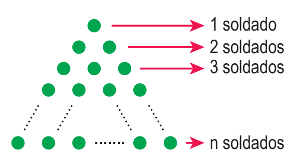
$\Rightarrow t_5 = 7 . 2^{n-1} = 7 . 2^4 = 112$

$t_6 = 7 . 2^{6-1} = 224$

$\therefore t_5 + t_6 = 336$

Clave E

9.



$S = 1 + 2 + 3 + ... + n = 5050$

$\dfrac{n(n+1)}{2} = 5 . 101 . 10$

$n(n+1) = 100(100+1)$

$\therefore$ n = 100 soldados o 100 filas.

Clave C

10. Si: 0 < a < 1

Además:

$1 + a + a^2 + a^3 + ... = 2$

Aplicamos suma límite: $\dfrac{1}{1-a} = 2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Nos piden:

$S = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + ... = \dfrac{1}{1-a^2}$

$\therefore S = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{3}$

Clave D

Nivel 2 (página 107) Unidad 4

Comunicación matemática

11.

Clave C

12. Sabemos que la suma de los ángulos es 360°

$\Rightarrow q + q + q . q^2 + q . q^3 = 360$

$1 + q + q^2 + q^3 = 40$

Como $q \in \mathbb{Z}$ y la PG es creciente

Damos valores a q = (1; 2; 3) ⇒ q = 3 cumple.

∴ q = 3; los ángulos son: 9; 27; 81 y 243

Razonamiento y demostración

13. $S = 1 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{100} + \dfrac{27}{1000} + \dfrac{81}{10000}...$

Es una PG de razón q = 3/10

$\Rightarrow S_{Lim} = \dfrac{1}{1-\frac{3}{10}} = \dfrac{10}{7}$

Clave D

14. De la PA.:

$: 0; 3; 6; 9; ...; a_{11}; ...; a_n$

Determinamos el t_{11}:

$t_{11} = 0 + 10(3) = 30$

$\Rightarrow$ la PA: 0; 3; 6; 9; ...; 30; ... ; a_x (30 = t_{11}; x términos)

$\Rightarrow$ la nueva PA (desde el undécimo término)

30; ... ; a_x (t_1 ... t_n)

$S_n = \left(\dfrac{t_1 + t_n}{2}\right)n$

Del dato: $495 = \dfrac{\left(30 + 30 + (x-1)3\right)x}{2}$

$990 = 60x + 3x^2 - 3x$

$330 = 20x - x + x^2$

$x^2 + 19x - 330 = 0$

x –11

x 30

$\therefore$ x = 11 términos

Clave B

15. : 13; $\underbrace{...}_{8 \text{ términos}}$; 112 ⇒ n = 8

Como: $r = \frac{b - a}{n + 1}$ ⇒ $r = \frac{112 - 13}{8 + 1}$

Luego: r = 11

Entonces:
$a_8 = a_1 + 7r$
$a_8 = 13 + 7(11)$
$a_8 = 90$

Clave C

16. $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$ ...(1)

$x.S = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...$ ...(2)

Restando (2) de (1):
$(1 - x)S = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

Como x < 1, entonces:

$(1 - x)S = \frac{1}{1 - x}$ ∴ $S = (1 - x)^{-2}$

Clave B

17. q = 2

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

$1024 = 2 . 2^{n-1} = 2^n \Rightarrow n = 10$

∴ 2; $\underbrace{4;\ 8;\ ...;\ 512}_{8}$; 1024

Por lo tanto, hay 8 medios proporcionales.

Clave C

Resolución de problemas

18. Sea: $S_n = 5n^2 + 7n$; $(\forall\ n \in \mathbb{Z}^+)$

Para:

$n = 1 \Rightarrow S_1 = a_1 = 5(1)^2 + 7(1) = 12$

Para:

$n = 2 \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 5(2)^2 + 7(2) = 34$

Luego: $12 + a_2 = 34 \Rightarrow a_2 = 22$

Las razón es: $r = a_2 - a_1 = 22 - 12 \Rightarrow r = 10$

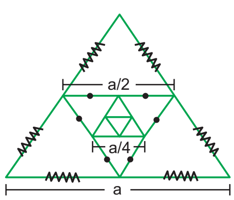
Clave B

19. $a_1 = S_1 = 1(1 + 8) = 9 \Rightarrow a_1 = 9$

Además:
$S_2 = a_1 + a_2 = 2(2 + 8) = 20$
$9 + a_2 = 20 \Rightarrow a_2 = 11$
Como $r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 2$
$a_{15} = a_1 + 14r = 9 + 14 . 2$ ∴ $a_{15} = 37$

Clave C

20. En cada operación efectuada el perímetro disminuye a la mitad.



El perímetro inicial es: 3a

El 2.° perímetro es: $3\left(\frac{a}{2}\right)$

El 3.er perímetro es: $3\left(\frac{a}{4}\right)$

⋮

$S = 3a + \frac{3a}{2} + \frac{3a}{4} + ...$

$S = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3a}{\frac{1}{2}} = 6a$

∴ S = 6a

Clave C

Nivel 3 (página 108) Unidad 7

Comunicación matemática

21. A) Como es una PA, entonces:

$5x + 4 - (4x + 2) = 4x + 2 - x^2$

$x + 2 = 4x + 2 - x^2$

$x^2 - 3x = 0$

$x = 3, x = 0 \notin \mathbb{Z}^+$

⇒ (La PA es 9; 14; 19; ... tc; ...; 89

$t_c = \frac{9 + 89}{2} = 49$

B) Como es una PG, entonces

$\frac{\frac{m+1}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{m}}$

$\frac{9(m + 1)}{54} = \frac{2m}{9}$

$81m + 81 = 108m$

$81 = 27m$

$m = 3$

La PG es: $\frac{1}{3}; \frac{2}{9}; \frac{4}{27}; ...; tc; ...; \frac{2^{14}}{3^{15}}$

$q = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow tc = \sqrt{\frac{1}{3} . \frac{2^{14}}{3^{15}}} = \frac{2^7}{3^8}$

22. I. Determinamos la progresión $\frac{\pi R^2}{2}; \frac{\pi R^2}{4}; \frac{\pi R^2}{8}; ...$

Es una PG de razón $q = \frac{1}{2}$ y $t_1 = \frac{\pi R^2}{2}$

$\Rightarrow t_n = t_1 . q^{n-1} = \frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$t_n = \frac{\pi R^2}{2^n}$

II. Suma de áreas sería:

$\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{8} + ...$

$\Rightarrow S_{Límite} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow S_L = \pi R^2$

Razonamiento y demostración

23. Multiplicando a S por x:

$xS = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + ...$ ...(1)

$S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + ...$ ...(2)

(2) – (1):

$(1 - x)S = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + ...$

$(1 - x)S = 1 + 2x(1 + x + x^2 + x^3 + ...)$

$(1 - x)S = 1 + 2x\left(\frac{1}{1 - x}\right) = \frac{1 - x + 2x}{1 - x} = \frac{1 + x}{1 - x}$

$\therefore S = \frac{1 + x}{(1 - x)^2}$

Clave D

24. $\frac{S_x}{S_y} = \frac{x^2}{y^2}$; $t_1 = 1$

$\frac{[2 + (x - 1)r]\frac{x}{2}}{[2 + (y - 1)r]\frac{y}{2}} = \frac{x^2}{y^2}$

$\frac{2 + (x - 1)r}{2 + (y - 1)r} = \frac{x}{y} \Rightarrow r = 2$

Nos piden:

$\frac{a_x}{a_y} = \frac{t_1 + (x - 1)r}{t_1 + (y - 1)r}$ ...(I)

Dato: $t_1 = 1$

Reemplazamos r = 2 en (I):

$\Rightarrow \frac{a_x}{a_y} = \frac{1 + 2(x - 1)}{1 + 2(y - 1)}$

$\therefore \frac{a_x}{a_y} = \frac{2x - 1}{2y - 1}$

Clave D

25. $A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^6 + ...$ ...(I)

Multiplicando por $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ambos miembros:

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 A = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^6 + ...$ ...(II)

Restamos (II) de (I):

$A - \left(\frac{2}{3}\right)^2 A = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + ...$

Aplicamos suma límite:

$A - \frac{4}{9}A = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow \frac{5}{9}A = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow A = \frac{36}{25}$

$B = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + ...$

$B = \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + ...\right) + 2\left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} + ...\right)$

$B = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} + 2\frac{\left(\frac{1}{7^2}\right)}{1 - \frac{1}{7^2}}$

$\Rightarrow B = \frac{7}{48} + \frac{2}{48} = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}$

Nos piden: A . B

$\therefore\ A.B = \frac{36}{25} \cdot \frac{3}{16} = \frac{27}{100} = 0,27$

Clave B

Resolución de problemas

26. a; a + r; a + 2r; a + 3r; a + 4r

$5a + 10r = -5 \Rightarrow a + 2r = -1$ ...(1)

De (1) $a = -1 - 2r$, reemplazamos:

$-1 - 2r;\ -1 - r;\ -1;\ -1 + r;\ -1 + 2r$

Dato: $(-1-2r)^2 + (-1-r)^2 + (-1)^2 + (-1+r)^2 + (-1+2r)^2 = 45$

Operando:

$10r^2 = 40 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

Reemplazando r = 2 en (1):

$a + 2(2) = -1 \Rightarrow a = -5$

$\therefore\ a_2 = a + r = -5 + 2 = -3$

Clave B

27. $\because t_1; t_2; t_3; t_4; t_5; t_6; t_7$

Datos:

- $t_1 + t_3 + t_5 + t_7 = 77$
- $t_2 + t_4 + t_6 = 56$

Sumando:

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 = 133$

$(2t_1 + 6r)\frac{7}{2} = 133$

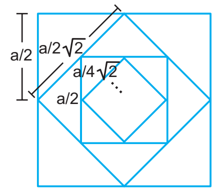
$2t_1 + 6r = 38 \Rightarrow t_1 + 3r = 19$

Nos piden: $t_{central}$

$\therefore t_{central} = t_4 = t_1 + 3r = 19$

Clave D

28.



Nos piden:

$S = a^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \ldots$

$S = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \ldots$

$S = a^2\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$

$S = 2a^2$

Clave A

29. $\because t_1; t_1 + r; \ldots$

$S_n = [2t_1 + (n-1)r]\frac{n}{2}$ ...(I)

$\because t_1 - 30; t_1 + (r+1); \ldots$

$S_n = [2(t_1 - 30) + (n-1)(r+1)]\frac{n}{2}$ ...(II)

De (I) y (II):

$[2t_1 + (n-1)r]\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}} = [2t_1 - 60 + (n-1)(r+1)]\frac{\cancel{n}}{\cancel{2}}$

$(n-1)r = -60 + (n-1)r + n - 1$

$\therefore n = 61$

Clave C

30. $\because\ t_1;\ t_1x^2;\ t_1x^4;\ t_1x^6;\ t_1x^8;\ t_1x^{10} \ldots$

lugar 1 2 3 4 5 6

Dato:

$S_p \cdot S_i = M^2$

$\underbrace{(t_1x^2 + t_1x^6 + t_1x^{10} + \ldots)}_{\text{n términos}}\underbrace{(t_1 + t_1x^4 + t_1x^8 + \ldots)}_{\text{n términos}} = M^2$

$t_1x^2(1 + x^4 + x^8 + \ldots)\,t_1(1 + x^4 + x^8 + \ldots) = M^2$

$t_1^2x^2\left(\frac{(x^4)^n - 1}{x^4 - 1}\right)^2 = M^2$

$t_1x\left(\frac{x^{4n} - 1}{x^4 - 1}\right) = M$

$\frac{t_1x(x^{4n} - 1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = M$

$\frac{t_1(x^{4n} - 1)}{x^2 - 1} = \frac{M(x^2+1)}{x}$ ...(I)

Nos piden:

$E = t_1 + t_1x^2 + t_1x^4 + \ldots$

$E = t_1\frac{((x^2)^{2n} - 1)}{x^2 - 1} = t_1\frac{(x^{4n} - 1)}{x^2 - 1}$ ...(α)

Reemplazando (I) en (α):

$\therefore\ E = M\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = M\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Clave A

MARATÓN MATEMÁTICA (página 110) Unidad 4

1. $\underbrace{A_1 = 4L^2; A_2 = L^2; A_3 = L^2/4; \ldots}_{PG \Rightarrow q = 1/4}$

$\Rightarrow A_{10} = 4L^2(1/4)^9 = \dfrac{L^2}{4^8}$

$\Rightarrow A_{20} = 4L^2(1/4)^{19} = \dfrac{L^2}{4^{18}}$

$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{10} A_n = \underbrace{4L^2 + L^2 + \dfrac{L^2}{4} \ldots}_{10 \text{ términos}}$

$$S = \frac{4L^2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} = 4L^2\left(\frac{\frac{1-4^{10}}{4^{10}}}{\frac{-3}{4}}\right)$$

$$S = \frac{L^2(4^{10} - 1)}{3 \,.\, 4^8}$$

$$S = \frac{L^2(4^{10} - 1)}{4^9 - 4^8}$$

$\Rightarrow S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$

$S = 4L^2 + L^2 + \dfrac{L^2}{4} + \cdots$

$$S = \frac{4L^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4L^2}{\frac{3}{4}} = \frac{16L^2}{3}$$

2. $a;\ a + r;\ a + 2r;\ a + 3r;\ a + 4r;\ a + 5r$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$a\quad b\quad c\quad \alpha\quad \beta\quad \phi$

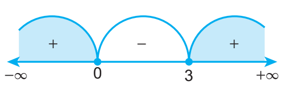
En lo que piden: $\dfrac{a + 4r - (a + r)}{a + 3r - (a + 2r)} = \dfrac{3r}{r} = 3$

Clave C

3. $f(x) = \sqrt{x(x-3)}$

$\Rightarrow x(x - 3) \geq 0$

Puntos críticos: 3 y 0



$x \in \langle -\infty; 0] \cup [3; +\infty\rangle$

También: $x \in \mathbb{R} - \langle 0; 3\rangle$

Clave D

4. $f(2) = 2^2 = 4$

$f(-2) = -(-2) = 2$

$\Rightarrow f(2) + f(-2) = 6$

Clave B

5. Por definición:

- $x - 2 > 0 \ \wedge\ x - 2 \neq 1$ ... (I)

  $x > 2 \ \wedge\ x \neq 3$

- $6 - x > 0 \Rightarrow 6 > x$ ... (II)

(I) y (II):

$x \in \langle 2; 6\rangle - \{3\}$

Clave C

6. Primero restringimos:

$x - 2 > 0 \ \wedge\ x - 2 \neq 1$

$x > 2 \ \wedge\ x \neq 3$ ...A

$x + 10 > 0$

$x > -10$ ...B

Intersecando A y B:

$x \in \langle 2; +\infty\rangle - \{3\}$

Resolvemos:

$\log_{x-2}(x + 10) = 2$

$(x + 10) = (x - 2)^2$

Luego:

$x^2 - 4x + 4 = x + 10$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$x \quad -6$

$x \quad 1$

$\Rightarrow x = 6 \ \vee\ x = -1$

$\therefore$ De la restricción: $x = 6$.

Clave C

7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 15}$

$f(x) = \sqrt{\underbrace{(x-3)^2}_{\geq 0} + 6}$

$\Rightarrow (x - 3)^2 \geq 0$

$(x - 3)^2 + 6 \geq 6$

$\underbrace{\sqrt{(x-3)^2 + 6}}_{f(x)} \geq \sqrt{6}$

$\therefore f(x) \in \langle \sqrt{6}; +\infty\rangle$

Clave D

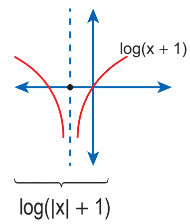
8. Como H es función:

$b - 2 = 7$

$\therefore b = 9$

Clave E

9. Como f(x) es una función par graficamos $\log(x + 1)$ y reflejamos con respecto al eje vertical $x = 1$



Clave E

10. $|x + 2| - |x - 1| = x + 1$ ...(1)

Restringimos:

Si $x < -2$, entonces reemplazando en (1):

$-x - 2 + x - 1 = x + 1$

$x = -4$

Si $x \in [-2; 1\rangle$, entonces reemplazando en (1):

$x + 2 + x - 1 = x + 1$

$x = 0$

Si $x > 1$, entonces reemplazando en (1):

$x + 2 - x + 1 = x + 1$

$x = 2$

$\therefore x = \{-4; 0; 2\}$

Clave D

11. $y = \dfrac{6 - x}{x + 1} = \dfrac{-(x - 6)}{x + 1} = \dfrac{-(x + 1 - 7)}{x + 1} = \underbrace{\dfrac{7}{x + 1}}_{m} - 1$

Dato: $x \in \langle 0; 5\rangle$, tenemos:

$0 < x < 5 \Rightarrow$ formamos m

$1 < x + 1 < 6$

$\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{x + 1} < 1$

$\dfrac{7}{6} < \overbrace{\dfrac{7}{x + 1}}^{m} < 7$

Luego:

$\dfrac{1}{6} < \dfrac{7}{x + 1} - 1 < 6$

$\Rightarrow y \in \left\langle \dfrac{1}{6}; 6\right\rangle$

Clave C